

Metodi matematičkog programiranja

Problem broj 6

Problem maksimizacije profita šemom višestruke hab-alokacije

Student:

Branko Grbić 1042/2020

Profesor:

Dr Zorica Stanimirović



Matematički fakultet
Beograd
mart 2021.

1 Opis problema

Problem kojim se bavimo tiče se uspostavljanja habova u određenim čvorovima grafa sa ciljem maksimizacije profita, pri čemu se profit ostvaruje ispunjenjem zahteva potražnje između dva čvora. Naš zadatak je da odredimo u kojim čvorima treba da uspostavimo habove, kao i da odredimo tačnu putanju ispunjenja potražnje između svaka dva čvora. Neka je $N = \{1, 2, \dots, n\}$ skup čvorova u mreži. Svaki od čvorova je potencijalna lokacija za uspostavljanje haba. Neka su i i j indeksi početnog i krajnjeg čvora redom, dok su k i l indeksi za čvorove u kojima su uspostavljeni habovi. Nadalje, pretpostavićemo da je matrica cene transporta $C = (c_{ij})_{n \times n}$ simetrična, odnosno $c_{ij} = c_{ji}$. Za svaki par čvorova, dat je prihod po jedinici zadovoljene potražnje između njih. Pretpostavljamo da svaki ne-hab čvor može biti spojen sa više habova (*šema višestruke alokacije*). Za svaki osnovan hab u nekom čvoru plaćamo fiksnu cenu njegovog uspostavljanja. Međutim, između svaka 2 haba, troškovi transporta između njih su smanjeni sa koeficijentom $0 < \alpha < 1$. Nećemo zahtevati da mreža habova čini kompletan graf¹.

2 Matematička formulacija problema

Parametri modela su definisani kao:

- w_{ij} Vrednost potražnje koja treba biti dostavljena iz čvora i u čvor j .
- r_{ij} Prihod dobijen od ostvarenja po jedinici potražnje iz čvora i u čvor j .
- c_{ij} Cena transporta po jedinici iz čvora i u čvor j .
- f_k Fiksni troškovi uspostavljanja haba u čvoru k .
- g_{kl} Fiksna cena uspostavljanja veze iz haba k prema habu l .
- α Koeficijent smanjenja cene transporta između 2 haba.

Promenljive modela su definisane kao:

- h_k Binarna promenljiva koja ima vrednost 1 ako je hab osnovan u čvoru k , inače ima vrednost 0.
- y_{ijkl} Binarna promenljiva koja ima vrednost 1 ako je potražnja iz čvora i do čvora j zadovoljena preko habova k i l , pri čemu je prvi hab k , a poslednji l , inače ima vrednost 0.
- z_{kl} Binarna promenljiva koja ima vrednost 1 ukoliko postoji veza od haba k do haba l , inače ima vrednost 0.
- f_{ikl} Vrednost potražnje iz čvora i koja će biti isporučena preko haba k ka habu l .

¹Kompletan graf je graf u kome su svaka dva čvora povezana ivicom.

Matematička formulacija ovog modela bi glasila [1]:

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} r_{ij} w_{ij} y_{ijkl} - \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} (c_{ik} + c_{lj}) w_{ij} y_{ijkl} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} \alpha c_{kl} f_{ikl} + \sum_{k \in N} f_k h_k + \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} g_{kl} z_{kl} \right] \quad (1)$$

$$\sum_{k \in N} \sum_{l \in N} y_{ijkl} \leq 1, \quad \forall i, j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{l \in N} y_{ijkl} + \sum_{l \in N: l \neq k} y_{ijlk} \leq h_k, \quad \forall i, j, k \in N \quad (3)$$

$$\sum_{l \in N: l \neq k} f_{ikl} - \sum_{l \in N: l \neq k} f_{ilk} = \sum_{j \in N} \sum_{l \in N} w_{ij} y_{ijkl} - \sum_{j \in N} \sum_{l \in N} w_{ij} y_{ijlk}, \quad \forall i, k \in N \quad (4)$$

$$f_{ikl} \leq O_i z_{kl}, \quad \forall i, k, l \in N, k \neq l \quad (5)$$

$$z_{kl} \leq h_k, \quad \forall k, l \in N, k \neq l \quad (6)$$

$$z_{kl} \leq h_l, \quad \forall k, l \in N, k \neq l \quad (7)$$

$$f_{ikl} \geq 0, \quad \forall i, k, l \in N \quad (8)$$

$$h_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in N \quad (9)$$

$$y_{ijkl} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j, k, l \in N \quad (10)$$

$$z_{kl} \in \{0, 1\}, \quad \forall k, l \in N, k \neq l \quad (11)$$

Izraz (1) predstavlja matematički opis funkcije cilja koju želimo da maksimizujemo. Prva suma predstavlja ukupan prihod od svih zadovoljenih potražnji. Od ukupnog prihoda oduzimamo sve tipove troškova da bismo izračunali ukupan profit. U uglastim zgradama su predstavljeni redom: cena transporta, cena uspostavljanja haba kao i cena uspostavljanja veza između habova. Cena transporta između habova je smanjena sa parametrom α . Nejednakost (2) nam govori sledeće: Ako je potražnja između dva čvora zadovoljena, tada postoji jedinstveni put određen sa prvim i poslednjim habom na putu između njih. Nejednakost (3) nam govori da potražnja između početnog i krajnjeg čvora može biti zadovoljena samo kroz locirane habove. Uslov (4) predstavlja jednačinu protoka potražnje kroz svaki čvor. Nejednakost (5) nam govori da sav protok potražnje mora da prođe kroz habove. Sa O_i je označen protok potražnje kroz čvor i i definisan je kao $O_i = \sum_{j \in N} w_{ij}$. Uslovi (6) – (7) određuju da se hab-veza zaista povezuje 2 haba. Uslovi (8) – (11) određuju kog su tipa zadate promenljive.

3 Instance

Parametri su generisani prema uputstvu koje stoji u radu [1]. U prvom redu se zadaje broj čvorova n , koje prema uputstvu ima fiksiranu vrednost koja iznosi $n = 25$. Zatim se zadaje matrica $W = (w_{ij})_{n \times n}$ u kojoj se zadaje potražnja između čvorova w_{ij} , pri čemu je potražnja skalirana tako da je zbir svih elemenata matrice W jednak 1. Zatim slede 2 matrice $R = (r_{ij})_{n \times n}$ i $C = (c_{ij})_{n \times n}$, pri čemu se u prvoj zadaje prihod od zadovoljene potražnje između svaka dva čvora r_{ij} , dok su u drugoj zadate cene transporta c_{ij} . Za prihod od zadovoljene potražnje pretpostavićemo da svi elementi matrice R mogu da uzimaju samo jednu vrednost koja je iz skupa $\{1000, 1500, 2000\}$. Zatim je dat niz $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dužine n u kojem su predstavljene cene za uspostavljanje haba u svakom čvoru. Zatim je zadata matrica $G = (g_{kl})_{n \times n}$ koja predstavlja cenu uspostavljanja hab-veze od haba k do haba l i pritom važi da je $f_k = 0.1 \cdot g_{kl}$. U poslednjem redu je zadat parametar α koji može da uzima vrednosti 0.2, 0.4, 0.6 ili 0.8. Primer instance za $n = 5$ zadat je u primeru ispod:

```
5
0 0.0250694 0.0295647 0.0776457 0.0181752
0.0250694 0 0.0503751 0.0530607 0.0128738
0.0295647 0.0503751 0 0.136159 0.0230813
0.0776457 0.0530607 0.136159 0 0.0739951
0.0181752 0.0128738 0.0230813 0.0739951 0
1500 1500 1500 1500 1500
1500 1500 1500 1500 1500
1500 1500 1500 1500 1500
1500 1500 1500 1500 1500
1500 1500 1500 1500 1500
0 576.963 946.495 597.597 373.813
576.963 0 369.533 613.039 429.108
946.495 369.533 0 858.331 749.602
597.597 613.039 858.331 0 255.03
373.813 429.108 749.602 255.03 0
150 100 50 100 100
15 15 15 15 15
10 10 10 10 10
5 5 5 5 5
10 10 10 10 10
10 10 10 10 10
0.4
```

4 Rezultati na instancama

Generisano je ukupno 20 instanci. Instance su sortirane po prihodu dobijenog po jedinici potražnje, pri čemu su prvo zadate one sa malim ($r = 1000$), zatim one sa srednjim ($r = 1500$) i na kraju one sa velikim prihodom ($r = 2000$). Uz parametar r , takođe smo razmatrali i vrednost parametra α , za kojeg smo uzeli moguće vrednosti 0.2, 0.4, 0.6 i 0.8. Instance su generisane u programskom jeziku C++, koje su nakon toga bile prosleđene rešavaču. Model, kao i operacije učitavanja instanci i ispisivanja rezultata su napisani u programskom jeziku LINGO. Instance su rešavane pomoću LINGO 18.0 rešavača. Rezultati prikazani u tabeli dobijeni su na mašini sa procesorom Intel i3-6006U 2 GHz i 4 GB RAM memorije. Vreme izvršavanja ograničeno je na 4 sata i u tabelama je vreme prikazano u sekundama. Svaka instanca je generisala optimalno rešenje.

Instanca	r	α	Vrednost funkcije cilja	Vreme t(s)	Broj iteracija
instancabr1.txt	1000	0.2	64.00	36.95	30232
instancabr2.txt	1000	0.2	100.07	37.37	27544
instancabr3.txt	1000	0.4	118.35	42.32	32565
instancabr4.txt	1000	0.6	114.00	39.27	25120
instancabr5.txt	1000	0.6	128.62	33.72	25539
instancabr6.txt	1000	0.8	114.00	36.19	29021
instancabr7.txt	1000	0.8	114.00	30.38	25536
instancabr8.txt	1500	0.2	348.77	43.42	50333
instancabr9.txt	1500	0.4	419.52	34.57	34790
instancabr10.txt	1500	0.4	398.27	37.14	50379
instancabr11.txt	1500	0.6	398.29	48.56	57025
instancabr12.txt	1500	0.6	409.45	43.19	61901
instancabr13.txt	1500	0.8	418.76	43.70	48607
instancabr14.txt	2000	0.2	778.35	46.65	69751
instancabr15.txt	2000	0.2	835.62	63.66	64123
instancabr16.txt	2000	0.4	827.55	49.59	60162
instancabr17.txt	2000	0.4	815.98	58.78	75443
instancabr18.txt	2000	0.6	777.56	46.56	67557
instancabr19.txt	2000	0.8	690.92	63.57	68220
instancabr20.txt	2000	0.8	797.95	76.71	62589

5 Analiza rezultata

Možemo da primetimo da se sa povećanjem prihoda r povećava i ukupan profit, kao što je i očekivano. Menjanje parametra α ne utiče mnogo kod malih i srednjih prihoda, što je posledica toga da je za takve prihode neefikasno uspostavljati habove. Kod velikih prihoda po jedinici potražnje, možemo videti da se sa povećavanjem α smanjuje i profit, kao što smo mogli da očekujemo. Vreme izvršavanja raste, kako raste potražnja. Kod većih prihoda po jedinici potražnje možemo očekivati više uspostavljenih habova.

Literatura

- [1] Gita Taherkhani, Sibel A. Alumur. *Profit maximizing hub location problems*. Omega (2019). (86): 1-15
- [2] <https://mathworld.wolfram.com/CompleteGraph.html>