

Matematčki fakultet

Metaheurističke metode

Domaći zadatak [7]

Obnoxious p-median Problem

Student:

Damjan Stanković

1081/2024

Nastavnik:

dr Zorica Stanimirović



1 Opis problema

Obnoxious p-median problem je varijanta poznatije p-median problema. P-median problem traži izbor lokacija na kojima je potrebno postaviti uslužne tačke tako da se minimizuje trošak usluge svih korisnika na nekom prostoru.

Obnoxious p-median problem zahteva da na nekom prostoru postavimo određen broj (p) postrojenja koja je potrebno maksimalno udalжити od korisnika na tom istom prostoru. U praksi se pojavljuje u planiranju lokacija deponija, hemijskih i nuklearnih postrojenja.

U ovom radu ćemo uporediti dve matematičke formulacije ovog problema i rešivost istih pomoću rešavača CPLEX.

2 Matematičke formulacije

2.1 Originalni model

Prva formulacija je postavljena u radu [2]. Ova formulacija je optimizovana za rešavanje pomoću Branch-and-cut metode. Problem je formulisan na sledeći način:

$$\max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{i,j} x_{i,j} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} y_j = p \quad (2)$$

$$x_{i,j} \leq y_j \quad \forall i \in I, j \in J \quad (3)$$

$$y_j + \sum_{k \in S(i,j)} x_{i,k} \leq 1 \quad \forall i \in I, j \in J \quad (4)$$

$$x_{i,j}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (5)$$

Objašnjenja promenljivih i parametara:

- I - Skup korisnika
- J - Skup lokacija potencijalnih centara
- $c_{i,j}$ - Udaljenosti korisnika i lokacija potencijalnih centara
- y_j - promenljiva odluke o uspostavljanju centra na lokaciji
- $x_{i,j}$ - promenljiva alokacije korisnika i centru j
- $S(i, j)$ - skup svih potencijalnih centara iz J koji su udaljeni od korisnika i više od potencijalnog centra j

Funkcija cilja (1) predstavlja sumu distanci korisnika od centara kojima su alocirani. Ograničenja osiguravaju da korisnik bude alocirano samo najbližem uspostavljenom centru.

Ograničenje (2) osigurava da ćemo otvoriti p centara.

Ograničenje (3) osigurava da je bilo koji korisnik alocirano otvorenom centru.

Ograničenje (4) osigurava da je korisnik alocirano najbližem otvorenom centru. Ako je $y_j = 1$ to znači da je centar j otvoren, i da korisnik ne može biti alocirano daljim centru. Ako je $y_j = 0$ onda centar j nije otvoren, a korisnik može biti alocirano samo jednom od daljih centara. Primetimo da ovo ograničenje takođe garantuje da jedan korisnik može biti alocirano najviše jednom centru.

Ograničenje (5) znači da su $x_{i,j}$ i y_j binarne promenljive.

2.2 Kompaktni model

U radu [3] je predstavljena alternativna, kompaktnija formulacija istog problema:

$$\max \sum_{i \in I} d_i \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} y_j = p \quad (7)$$

$$d_i \leq c_{i,j} + (1 - y_j)M \quad \forall i \in I, j \in J \quad (8)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \forall j \in J \quad (9)$$

Sve oznake koje su iste kao u prethodnoj formulaciji imaju isto značenje.

- d_i je promenljiva koja meri udaljenost od korisnika i do njemu najbližeg centra.
- M je dovoljno veliki broj da osigura da će $c_{i,j} + M$ biti veće od bilo kog drugog $c_{i,j'}$. Najjednostavnije je postaviti $M = \max_{i \in I, j \in J} (c_{i,j})$

Funkcija cilja (6) je suma svih d_i . Ograničenja osiguravaju da d_i jeste upravo distanca do najbližeg uspostavljenog centra.

Ograničenje (7) osigurava da otvaramo tačno p centara.

Ograničenje (8) Osigurava da je d_i manje ili jednako od udaljenosti do svih uspostavljenih centara ($y_j = 1$). Ako je $y_j = 0$ M neutrališe ograničenje.

Ograničenje 9 osigurava da je y_j binarna promenljiva.

3 Instance

3.1 Generisanje instanci

Instance su generisane na osnovu instanci OpM.LIB.2016. Ove instance su preuzete sa sajta istraživačke grupe GRAFO [1]. Instance korištene u ovom radu su generisane na osnovu instanci pmed17, specifično pmed17.txt.table.p25.A, pmed17.txt.table.p25.B, pmed17.txt.table.p50A, pmed17.txt.table.p50B, pmed17.txt.table.p100A, pmed17.txt.table.p100B.

Instance u biblioteci su dimenzija 200×200 , te su izvan mogućnosti CPLEX rešavača da ih reši u 2 sata. U skladu sa tim na osnovu obe ove instance izgenerisali smo 36 novih instanci.

Uzeli smo prve minore matrica distanci iz biblioteke veličine 50×50 , 100×100 , 150×150 i 200×200 te za njih varirali parametar p : za instance 50×50 $p = 10, 15, 25$, za instance 100×100 $p = 15, 25, 50$, za instance 150×150 $p = 25, 50, 75$, za instance 200×200 $p = 25, 50, 100$.

Instance smo grupisali u tri grupe:

- Male: Sve 50×50 i 100×100 za $p = 15$,
- Srednje: 100×100 $p = 25, 50$ i 150×150 $p = 25, 50$,
- Velike: 150×150 $p = 75$ i sve 200×200 .

Za prilagođavanje instanci čitanju podataka svaki *.txt* fajl sa podacima je sledećeg oblika:

- Ime fajla: *pmed17pnC_cxc_pm* gde nC određuju instancu na osnovu koje je generisana naša, c je veličina minora a m je broj centara koji zahtevamo od instance.
- Forma fajla: Svi fajlovi su oblika:
 c
 c
 p
 M
 777
gde c označava veličinu minora, p broj čvorova a M je $c \times c$ matrica sa distancama između korisnika i potencijalnih centara. 777 je konstanta za proveru validnosti učitavanja.

3.2 Primer instance

Ovde dajemo primer kako instance izgledaju. Instanca iz primera nije korištena:

```
4
4
2
19.00 22.00 50.00 12.00
26.00 36.00 51.00 19.00
30.00 36.00 39.00 41.00
40.00 49.00 50.00 39.00
777
```

4 Rezultati

Opisanim postupkom smo generisali 72 instance. Skripte za prevođenje instanci iz oblika u kom su zapisane u biblioteci u oblik u kom ih napisani C++ kod može pročitati su pisane u Python-u.

Model, učitavanje instanci i ispis rezultata u izlazne fajlove su implementirani u programskom jeziku C++. Instance su rešavane pomoću IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 22.1.1 rešavača. Rezultati su dobijeni na mašini sa procesorom AMD Ryzen 5 7535HS i 16GB RAM memorije. Vreme izvršavanja je ograničeno na 2 sata. Sve instance su rešavane na više jezgara. Vreme u tabelama je procena potrebnog vremena za postizanje istog rezultata na jednom jezgru koju je izračunao sam CPLEX. Ako nije dokazana optimalnost nađenog rešenja, ono je boldovano u tabeli.

Podaci o rešenim instancama, same instance kao i ovaj pdf se može preuzeti na stranici <https://drive.google.com/drive/folders/1ZhFi6QskAVtP8RZNIulEv>

5 Analiza rezultata

5.1 Zavisnost funkcije cilja i kompleksnosti procesa rešavanja od parametara

U tabelama 1, 2, 3 se nalaze rezultati koje je CPLEX dobio kao rešenja originalnog modela. Ukoliko nakon 2 sata rada CPLEX nije našao optimalno rešenje, dobijena vrednost je boldovana.

Primećujemo da povećanjem parametra p vrednost funkcije cilja opada. Ovo je očekivano jer ako moramo da rasporedimo veći broj centara, očekujemo da će udaljenost od naselja da se smanji.

Takođe možemo primetiti da se sa povećanjem parametra p kompleksnost rešavanja problema ne povećava značajno, iako se pretraživački prostor povećava.

Sa povećanjem dimenzije problema raste i kompleksnost rešenja i vrednos funkcije cilja, što je u skladu sa očekivanjima

5.2 Upoređivanje originalnog i kompaktnog modela

U tabelama 4 i 5 se vide rezultati rešavanja instanci dimenzije 50×50 i 100×100 korištenjem kompaktnog modela.

Rezultati na najmanjim instancama (50×50) rezultati nisu jasni, verovatno zbog činjenice da originalni model zahteva predprocesuiranje podataka.

Na instancama 100×100 vidimo da rešavanje originalnog modela ide značajno brže i pouzdanije, jer kompaktni model nije uspeo pronaći optimalno rešenje ili dokazati optimalnost rešenja koje je pronašao.

Posmatrajući broj čvorova rezultati postaju još jasniji. Originalni model ima do na red veličine manje čvorova u svim generisanim rešenjima.

Literatura

- [1] Colmenar, J. M., Greistorfer, P., Martí, R., Duarte A. *Obnoxious p -median Problem*, Optscicom Project, 2016
- [2] Labbé et al. *Obnoxious p -Median problems: valid inequalities and a Branch-and-Cut approach*, ORP3, Paris, 2001.
- [3] Lin Chang-Chun, Chiang Yen-I, *Alternative formulations for the obnoxious p -median problem*, Discrete Applied Mathematics, 289, 366-373, 2021.
- [4] Mladenović Nenad, Alkandari Abdulaziz, Pei Jun, Todosijević Raca, Pardalos Panos M. *Less is more approach: basic variable neighborhood search for the obnoxious p -median problem*, Intl. Trans. in Op. Res. 27 (2020) 480–493

Tabela 1: Instance malih dimenzija, originalni model

Ime instance	Rezultat	Vreme	Broj iteracija	Broj Čvorova
pmed17p25A_50x50_p15	1631	9.01562	1010	0
pmed17p25A_50X50_p20	1441	4	1184	0
pmed17p25A_50x50_p25	1283	3.20312	893	0
pmed17p25A_100x100_p15	3662	4261.08	1605453	8376
pmed17p25B_50x50_p15	1659	4.40625	1179	0
pmed17p25B_50X50_p20	1453	9.70312	2156	0
pmed17p25B_50x50_p25	1253	5.51562	1230	0
pmed17p25B_100x100_p15	3676	1282.16	699726	7125
pmed17p50A_50x50_p15	1777	2.70312	698	0
pmed17p50A_50X50_p20	1567	2.6875	1180	0
pmed17p50A_50x50_p25	1386	2.6875	1015	0
pmed17p50A_100x100_p15	3955	2847.84	1175935	9981
pmed17p50B_50x50_p15	1601	29.5625	82311	2512
pmed17p50B_50X50_p20	1445	23.7812	56134	2476
pmed17p50B_50x50_p25	1318	12.8906	50117	1293
pmed17p50B_100x100_p15	3678	6482.25	1770944	15211
pmed17p100A_50x50_p15	1585	9.09375	2016	0
pmed17p100A_50X50_p20	1398	11.9062	24990	1059
pmed17p100A_50x50_p25	1284	3.90625	958	0
pmed17p100A_100x100_p15	3784	991.438	484583	4950
pmed17p100B_50x50_p15	1665	5.15625	941	0
pmed17p100B_50X50_p20	1484	6.71875	1188	0
pmed17p100B_50x50_p25	1328	2.51562	926	0
pmed17p100B_100x100_p15	3652	5857.67	2287986	13207

Tabela 2: Instance srednjih dimenzija, originalni model

Ime instance	Rezultat	Vreme	Broj iteracija	Broj Čvorova
pmed17p25A_100x100_p25	3148	3072.47	1139170	13570
pmed17p25A_100X100_p50	2288	630.297	456009	7491
pmed17p25A_150x150_p25	4903	67187	9467896	44553
pmed17p25A_150X150_p50	3865	74495.5	15350602	80743
pmed17p25B_100x100_p25	3115	2013.09	861647	6845
pmed17p25B_100X100_p50	2180	754.062	595016	6482
pmed17p25B_150x150_p25	5192	50372.3	11477280	35094
pmed17p25B_150X150_p50	4005	18903.8	2921110	18730
pmed17p50A_100x100_p25	3339	774.109	397765	4156
pmed17p50A_100X100_p50	2341	851.781	488296	7435
pmed17p50A_150x150_p25	5302	75188.8	12109730	35068
pmed17p50A_150X150_p50	4048	22189.4	3614628	22683
pmed17p50B_100x100_p25	3147	2417.98	878607	10278
pmed17p50B_100X100_p50	2372	1157.39	714555	13888
pmed17p50B_150x150_p25	5029	71567.3	11915076	41277
pmed17p50B_150X150_p50	3924	67398.8	11336775	58762
pmed17p100A_100X100_p25	3095	4473.8	2016534	12048
pmed17p100A_100x100_p50	2288	710.672	487586	7016
pmed17p100A_150x150_p25	5150	71820	11946923	41850
pmed17p100A_150X150_p50	3882	77946.8	18071094	101831
pmed17p100B_100X100_p25	3145	7227.11	2618505	41129
pmed17p100B_100x100_p50	2383	660.516	357236	4534
pmed17p100B_150x150_p25	5049	62726.5	9546496	26082
pmed17p100B_150X150_p50	3973	32042.2	5360046	25093

Tabela 3: Instance velikih dimenzija, originalni model

Ime instance	Rezultat	Vreme	Broj iteracija	Broj Čvorova
pmed17p25A_150x150_p75	3205	14123.4	3552180	25181
pmed17p25A_200x200_p25	6690	55818.7	3751981	9370
pmed17p25A_200X200_p50	5426	70086.4	5720237	18125
pmed17p25A_200x200_p100	4003	68741.5	3992328	16397
pmed17p25B_150x150_p75	3200	8051.27	1703242	11464
pmed17p25B_200x200_p25	7212	63314.6	4723793	6122
pmed17p25B_200X200_p50	5670	74558.8	6083869	27024
pmed17p25B_200x200_p100	4109	78291.3	6256727	35087
pmed17p50A_150x150_p75	3257	26780.1	6727304	45959
pmed17p50A_200x200_p25	6964	65556.4	4254247	9107
pmed17p50A_200X200_p50	5328	65424.3	5750124	15457
pmed17p50A_200x200_p100	3887	65227.4	4621528	22506
pmed17p50B_150x150_p75	3202	62772.4	13649000	107531
pmed17p50B_200x200_p25	6647	50079.3	3063154	13912
pmed17p50B_200X200_p50	5207	75731.3	6105763	23105
pmed17p50B_200x200_p100	3852	77390.4	6481882	38716
pmed17p100A_150x150_p75	3207	36931.2	15103028	373050
pmed17p100A_200x200_p25	6888	65929.1	5598175	9994
pmed17p100A_200X200_p50	5253	75467.3	6167025	19127
pmed17p100A_200x200_p100	3949	77544.4	4714840	25548
pmed17p100B_150x150_p75	3314	13018.2	2320152	19785
pmed17p100B_200x200_p25	6816	65485.9	4031203	12572
pmed17p100B_200X200_p50	5419	75750.8	5959340	17046
pmed17p100B_200x200_p100	4013	77273.6	7736962	41735

Tabela 4: Instance 50×50 , kompaktni model

Ime instance	Rezultat	Vreme	Broj iteracija	Broj Čvorova
pmed17p25A_50x50_p15	1631	5.90625	82728	8214
pmed17p25A_50X50_p20	1441	4.10938	84655	7232
pmed17p25A_50x50_p25	1283	3.90625	67517	7350
pmed17p25B_50x50_p15	1659	3.64062	46000	5539
pmed17p25B_50X50_p20	1453	4.26562	70712	5851
pmed17p25B_50x50_p25	1253	8.96875	91237	5945
pmed17p50A_50x50_p15	1777	5.07812	81489	5849
pmed17p50A_50X50_p20	1567	8.59375	89466	6170
pmed17p50A_50x50_p25	1386	4.09375	73165	8074
pmed17p50B_50x50_p15	1601	12.0781	123438	11562
pmed17p50B_50X50_p20	1445	14.4219	151104	14449
pmed17p50B_50x50_p25	1318	25.5312	122854	9304
pmed17p100A_50x50_p15	1585	10.0312	82120	7374
pmed17p100A_50X50_p20	1398	17.9531	219671	20298
pmed17p100A_50x50_p25	1284	10.625	138204	9121
pmed17p100B_50x50_p15	1665	8.40625	82949	4934
pmed17p100B_50X50_p20	1484	4.67188	84470	6703
pmed17p100B_50x50_p25	1328	7.45312	65970	6631

Tabela 5: Instance 100×100 , kompaktni model

Ime instance	Rezultat	Vreme	Broj iteracija	Broj Čvorova
pmed17p25A_100x100_p15	3662	2750.91	4915695	384647
pmed17p25A_100x100_p25	3148	24885.8	84107866	6292995
pmed17p25A_100X100_p50	2288	20405.7	27296239	2266741
pmed17p25B_100x100_p15	3676	1923	5120071	365742
pmed17p25B_100x100_p25	3115	26680.6	43118435	3604244
pmed17p25B_100X100_p50	2180	31480.1	70418423	6186665
pmed17p50A_100x100_p15	3955	8004.91	23067729	1832479
pmed17p50A_100x100_p25	3339	17402.7	30982358	3599880
pmed17p50A_100X100_p50	2341	38311.5	140171783	11557241
pmed17p50B_100x100_p15	3678	4922.23	12942573	979819
pmed17p50B_100x100_p25	3147	27393	57592894	6367288
pmed17p50B_100X100_p50	2372	30463.7	65960878	5462916
pmed17p100A_100x100_p15	3784	736.344	2069119	132906
pmed17p100A_100X100_p25	3095	59838.6	117669728	12727091
pmed17p100A_100x100_p50	2288	37674.8	98173084	7766855
pmed17p100B_100x100_p15	3652	6784.02	9430146	947744
pmed17p100B_100X100_p25	3145	22136.6	39000615	3731010
pmed17p100B_100x100_p50	2383	39067.1	147381237	10938170