Математика I

Зора Голубовић

1.1.2020. године

Једначина $x' = f(t)$

Одредити опште решење ДЈ $x' = f(t)$. Одредити Кошијево решење које задовољава почетни услов $x(t_0) = x_0$.

Решење посматране ДЈ се добија интеграцијом $x = \int f(\xi)d\xi + C$. Кошијево решење се такође лако добија, $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi)d\xi + C$ из почетног услова $x(t_0) = x_0$, одакле је $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi)d\xi + x_0$.

Једначина $x' = f_1(t)f_2(x)$

Посматрана једначина се назива ДЈ са раздвојеним промењљивим. Како је $x' = \frac{dx}{dt}$, то се добија $\frac{dx}{f_2(x)} = f_1(t)dt$, одакле се интеграцијом налази решење.

Једначина $x' = f(\frac{x}{t})$

Посматрана једначина се решава сменом $u = \frac{x}{t}$ одакле је $x' = (ut)' = u't + u$, односно $u' = \frac{f(u)-u}{t}$.

Једначина $x' + P(t)x = Q(t)$

За $Q(t) \equiv 0$ једначина се назива хомогеном линеарном, а за $Q(t) \neq 0$ нехомогеном линеарном ДЈ. Решава се множењем интеграционим фактором $e^{\int P(t)dt}$, одакле следи $(x \cdot e^{P(t)})' = Q(t)e^{\int P(t)dt}$, одакле се интеграцијом добија $x = e^{-\int P(t)dt}(C + \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt)$.

Једначина $x' + P(t)x = Q(t)x^\alpha$**,** $\alpha \notin \{0, 1\}$

Посматрана једначина је Бернулијева и на линеарну се своди сменом $u = x^{1-\alpha}$.

Задаци
1. Решити ДЈ $y' = \frac{1}{x}$.

Пре него што приступимо решавању ДЈ треба одредити област дефинисаности (унија области дефинисаности функција $f(x)$ и $\frac{1}{f(x)}$). ОД је $\mathbb{R}^2$. ДЈ је првог типа.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}, \\ dy &= \frac{dx}{x}, \\ y &= C + \ln|x|. \end{aligned}$$

2. Решити ДЈ $x^2y' = xy + y^2e^{-\frac{y}{x}}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}, \\
u &= \frac{y}{x}, \\
u'x + u &= u + e^{-u}, \\
u'x &= e^{-u}, \\
e^{u} du &= \frac{dx}{x}, \\
e^{u} &= \ln|x| + C, \\
e^{\frac{y}{x}} &= \ln|x| + C.
\end{aligned}
$$

3. Решити ДЈ $y' \cos x - y^4 - y \sin x = 0$. Запишимо једначину најпре у облику $y' - y \sin x = y^4$. Једначина је Бернулијева, па се сменом $u = y^{-3}$ своди на линеарну. Како је $u' = -3u^{\frac{4}{3}} y'$, то се након краћег рачуна добија $y^{-3} = c \cos^3 x + 2 \sin^3 x - 3 \sin x$.