

1 Пета недеља

1.1 Разни задаци

1. Одредити $f^{-1}[A]$ ако је $A = [0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Решење. $f^{-1}[A] = [0, \infty)$, што се добија применом АГ неједнакости за $x \geq 0$:

$$0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2. Нека је $f(n) = 9 \cdot 4^n - 13 \cdot 6^n + 4 \cdot 9^n$, $n \in \mathbb{N}$ и $A = (-\infty, 0]$. Одредити $f^{-1}[A]$.

Решење. Треба решити $(9 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n)(2^n - 3^n) \leq 0$, одакле се добија $f^{-1}[A] = \{1, 2\}$

3. Проверити да је производ две парне (непарне) функције парна функција и да је производ парне и непарне функције непарна функција.

Решење. По дефиницији.

4. Одредити укупан број бинарних релација на n -елементном скупу. Колико има рефлексивних релација? А симетричних?

Решење. Проблем укупног броја бинарних релација над n -елементним скупом је еквивалентан попуњавању квадратне таблице $n \times n$ бројевима 0 или 1, односно износи 2^{n^2} . Број рефлексивних релација је једнак броју могућности да се попуни таблица $n \times n$ ако је попуњена главна дијагонала, тј. број могућности је 2^{n^2-n} . Број начина за попуњавање таблице која одговара симетричној релацији је $2^{1+2+\dots+n} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$.

5. Доказати да је пресликавање $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, где је $f(n) = \{\alpha n\}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, ињективно за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Претпоставимо супротно, да је $f(n) = f(m)$ за $m \neq n$. Тада, $\{\alpha n\} = \{\alpha m\}$ тј. $\alpha n = p + \alpha m$, за неко $p \in \mathbb{Z}$. Међутим, тада је $\alpha = \frac{p}{n-m} \in \mathbb{Q}$, контрадикција.

6. Наћи максимум функције $f(x, y, z) = 5x - 6y + 7z$ на елипсоиду $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$.

Решење. Применом Коши-Шварцове неједнакости се добија

$$(5x - 6y + 7z)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}x - \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}y + \frac{7}{2} \cdot 2z\right)^2 \leq \left(\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right)(2x^2 + 3y^2 + 4z^2) = \frac{147}{4},$$

одакле је максимум функције $\frac{\sqrt{147}}{2}$.

Дефиниција 1. $a \in \mathbb{R}$ је гранична вредност низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon)$$

Теорема. Претпоставимо да за низове $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ важи

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

Тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Теорема. Монотон и ограничен низ конвергира.

7. Доказати по дефиницији да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.

Решење. Тривијално.

8. Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3}{2n^2+3} - \frac{5n^2+1}{5n+1}\right)$.

Решење. Лимес је $\frac{1}{5}$.

9. Ако је $|a|, |b| < 1$, наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n a^k}{\sum_{k=0}^n b^k}$.

Решење. Лимес је $\frac{b-1}{a-1}$.

10. Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Решење. Применом теореме о три лимеса, налази се да је лимес једнак 1.