

Задатак са једанаестог практикума

Златко Лазовић

13. децембар 2016.

1. Испитати непрекидност функције $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}$.

Решење. Ако је $|x| > 4$, онда је $\frac{x^2}{4} > |x| > 1$ и важи

$$\frac{x^2}{4} \leq \sqrt[n]{1 + |x|^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n} = \frac{x^2}{4} \sqrt[n]{\left(\frac{4}{x^2}\right)^n + \left(\frac{4|x|}{x^2}\right)^n + 1} \leq \frac{x^2}{4} \sqrt[n]{1 + 1 + 1} = \frac{x^2}{4} \sqrt[n]{3},$$

а одатле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} = \frac{x^2}{4}.$$

Ако је $1 < |x| < 4$, онда је $|x| > 1 > \frac{x^2}{4}$ и важи

$$|x| \leq \sqrt[n]{1 + |x|^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n} = |x| \sqrt[n]{\left(\frac{1}{|x|}\right)^n + 1 + \left(\frac{x^2}{4|x|}\right)^n + 1} \leq |x| \sqrt[n]{1 + 1 + 1} = |x| \sqrt[n]{3},$$

а одатле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} = |x|.$$

Ако је $|x| < 1$, онда је $1 > |x| > \frac{x^2}{4}$ и важи

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + |x|^n + \left(\frac{x^2}{4}\right)^n} = \sqrt[n]{1 + 1 + 1} \leq \sqrt[n]{3},$$

а одатле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} = 1.$$

Према томе,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}} = \max\{1, |x|, \frac{x^2}{4}\} = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & x \leq -4; \\ -x, & -4 < x \leq -1; \\ 1, & -1 < x \leq 1; \\ x, & 1 < x \leq 4; \\ \frac{x^2}{4}, & x > 4. \end{cases}$$

Функција $f(x)$ је непрекидна на $(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$ (зато што су функције $\frac{x^2}{4}$, $-x$, 1 , x непрекидне).

Потребно је испитати непрекидност у $x = -4, x = -1, x = 1$ и $x = 4$.

Да би била непрекидна у $x = -4$ потребно је и довољно да важи

$$\lim_{x \rightarrow -4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+} f(x) = f(-4).$$

Из следећег

$$\lim_{x \rightarrow -4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-} \frac{x^2}{4} = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow -4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+} -x = 4,$$

$$f(-4) = 4$$

важи $\lim_{x \rightarrow -4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+} f(x) = f(-4)$, па је $f(x)$ непрекидна у $x = -4$.

Да би била непрекидна у $x = -1$ потребно је и довољно да важи

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1).$$

Важи

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} -x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} 1 = 1,$$

$$f(-1) = 1,$$

одакле је задовољено $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1)$, па је $f(x)$ непрекидна у $x = -1$.

На сличан начин се може доказати и непрекидност у $x = 1$ и у $x = 4$.

Функција $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R}$.

△