

Четрнаести практикум из Анализе 1

Златко Лазовић

10. јануар 2017.

1. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Решење. 1) Домен функције је $D_f = (0, +\infty)$.

2) Функција f није ни парна ни непарна.

3) Из граничне вредности

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} \right) = 0$$

слиди да је $y = 0$ хоризонтална асимптота здесна.

Нема вертикалну асимптоту јер је

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + o(1)}{1} = 1.$$

4) Функција је позитивна на D_f .

5) Први извод функције је

$$f'(x) = \left(\frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{\frac{1}{1+x} \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \arctg \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x} - (x+1)\arctg \sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(x+1)}.$$

6) Други извод функције је

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\sqrt{x} - (x+1)\arctg \sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(x+1)} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \arctg \sqrt{x} - (x+1) \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} x^{\frac{3}{2}} \right) (x+1) - (\sqrt{x} - (1+x)\arctg \sqrt{x}) \left(\frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right)}{x^3(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}} \left(3\arctg \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{(x+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Знак другог извода зависи од знака функције

$$g(x) = 3\arctg \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{(x+1)^2}.$$

Први извод функције $g(x)$ је

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(3\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{(x+1)^2} \right)' \\ &= \frac{3}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\left(5\sqrt{x} + \frac{5x+3}{2\sqrt{x}} \right) (x+1)^2 - \sqrt{x}(5x+3)2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)^3} (3(x+1)^2 - (x+1)(15x+3) + 4x(5x+3)) \\ &= \frac{8x^2}{2\sqrt{x}(x+1)^3}, \end{aligned}$$

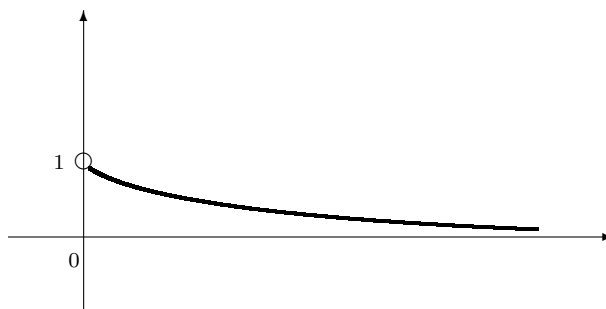
одакле је $g'(x) > 0$ за свако $x \in (0, +\infty)$, односно g је растућа функција на $(0, +\infty)$. С обзиром да је непрекидна функција g растућа на $(0, +\infty)$ и да је $g(0) = 0$, функција g је позитивна на $(0, +\infty)$. Добили смо да је и $f''(x)$ позитивна функција на $(0, +\infty)$, односно да је f конвексна функција.

С обзиром да је непрекидна функција f' растућа (због $f''(x) > 0$ за свако $x \in (0, +\infty)$) и да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, имамо да је $f'(x) < 0$ за свако $x \in (0, +\infty)$.

Према томе, $f(x)$ је опадајућа функција. Из следеће таблице се може видети како изгледа график функције

график	$(0, +\infty)$
f	$\searrow$
f	$\cup$
f	дописати

7) График



△

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \operatorname{arctg}|\ln|x||$.

Решење. 1) Домен функције је $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Функција је парна јер је $f(x) = f(-x)$ за свако $x \in D_f$.

За $x > 0$ важи

$$f(x) = \operatorname{arctg}|\ln x| = \begin{cases} \operatorname{arctg} \ln x, & x \geq 1; \\ -\operatorname{arctg} \ln x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Испитајмо функцију $h(x) = \operatorname{arctg} \ln x$ на $(0, +\infty)$.

1') Домен функције $h(x)$ је $D_h = (0, +\infty)$.

2') Функција $h(x)$ није ни парна ни непарна.

3') Из $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \ln x = \frac{\pi}{2}$, права $y = \frac{\pi}{2}$ је хоризонтална асимптота здесна.

Нема вертикалну асимптоту јер је $\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{arctg} \ln x = -\frac{\pi}{2}$.

4') Знак функције, нуле функције

$$h(x) > 0 \quad \text{за } x > 1,$$

$$h(x) < 0 \quad \text{за } x \in (0, 1),$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

5') Први извод, монотоност, екстремне вредности

Први извод је

$$h'(x) = (\operatorname{arctg} \ln x)' = \frac{1}{1 + \ln^2 x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} > 0,$$

одакле је $h(x)$ растућа на D_f .

6') Други извод, конвексност, превојне тачке

Други извод је

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \right)' = -\frac{1}{x^2(1 + \ln^2 x)}(1 + \ln^2 x + 2 \ln x) \\ &= -\frac{1}{x^2(1 + \ln^2 x)}(1 + \ln x)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

одакле је $h(x)$ конкавна на $(0, +\infty)$.

график	$(0, +\infty)$
f	
f	$\cap$
f	допунити

7') График функције $h(x)$

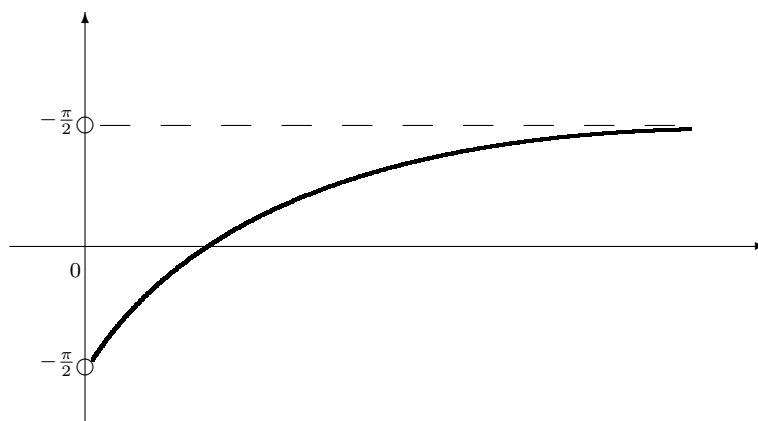


График функције $h(x)$ на $(0, +\infty)$

7) График функције $f(x)$

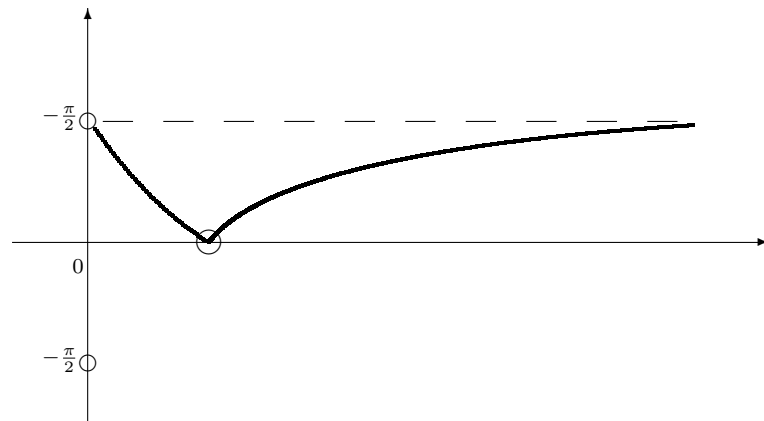


График функције $f(x)$ на $(0, +\infty)$

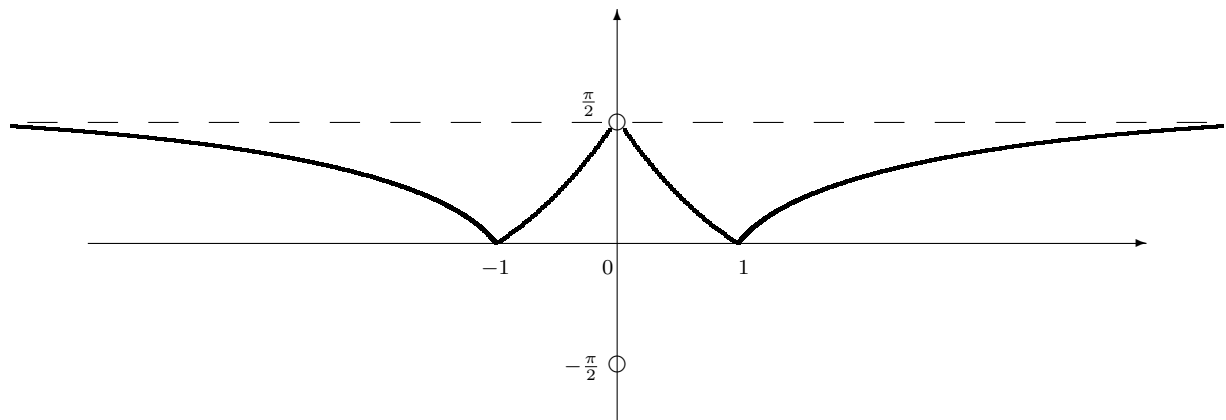


График функције $f(x)$ на $(0, +\infty)$

Наћи ћемо углове под којим график функције $f(x)$ улази у тачке $x = 1, x = 0$ и $x = -1$ и излази из $x = 1, x = 0$ и $x = -1$. Важи

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{1 + \ln^2 x} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} = \frac{1}{1 + 0} = 1,$$

одакле је угао под којим излази из $x = 1$ једнак

$$\varphi_1 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4},$$

а из

$$f'(1_-) = -h'(1) = -1$$

следи да је угао под којим улази у $x = 1$ једнак

$$\varphi_2 = \arctg 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Угао под којим излази из тачке $x = 0$ налазимо и следећег

$$\begin{aligned} f'(0_+) &= -h'(0_+) = -\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} = -\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{(1 + \ln^2 x)} = (\text{Лопиталово правило}) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2 \ln x \frac{1}{x}} = -\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-\frac{1}{x}}{2 \ln x} = (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 \frac{1}{x}} = -\infty, \end{aligned}$$

односно $\varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$.

Функција улази у $x = 0$ под углом од $\frac{\pi}{2}$, улази у $x = -1$ под углом $-\frac{\pi}{4}$ и излази у $x = -1$ под углом од $\frac{\pi}{4}$. $\triangle$