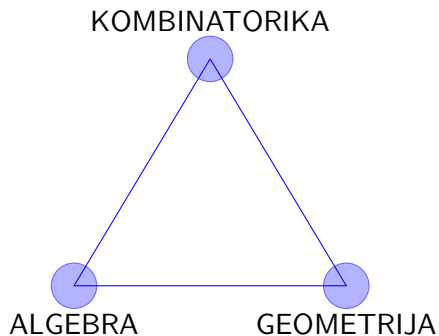


Simetrične i kvazisimetrične funkcije u kombinatorici

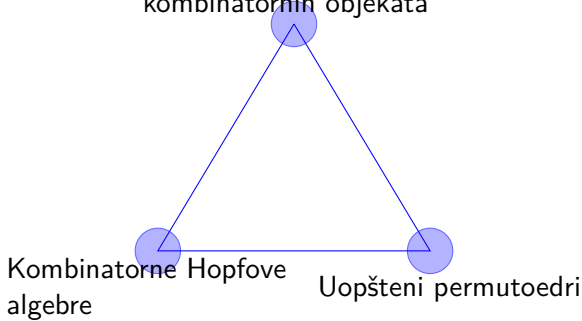
Vladimir Grujić

Univerzitet u Beogradu

Susret matematičara Srbije i Crne Gore,
Budva 11-14. oktobar 2019.



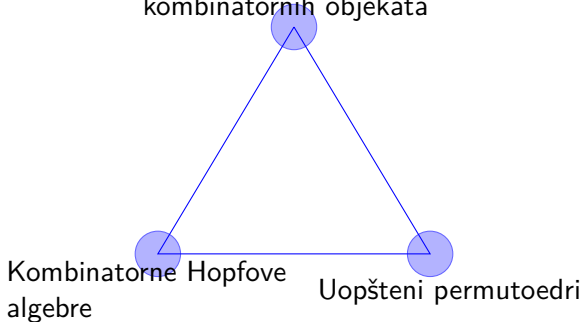
Enumerativne invarijante
kombinatornih objekata



M. Aguiar, N. Bergeron, F. Sottile, *Combinatorial Hopf algebras and generalized Dehn-Sommerville relations*, Compositio Math. (2006)

A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, Int. Math. Res. Notices (2009)

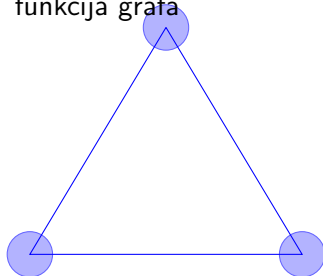
Enumerativne invarijante
kombinatornih objekata



M. Aguiar, N. Bergeron, F. Sottile, *Combinatorial Hopf algebras and generalized Dehn-Sommerville relations*, Compositio Math. (2006)

A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, Int. Math. Res. Notices (2009)

Hromatska simetrična
funkcija grafa

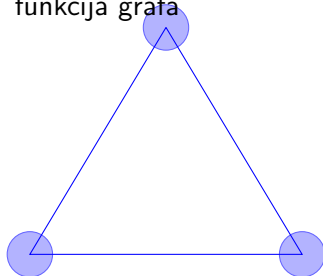


KHA grafova

Grafički zonotopi

R. Stanley, A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph, Adv. Math. (1995)

Hromatska simetrična
funkcija grafa

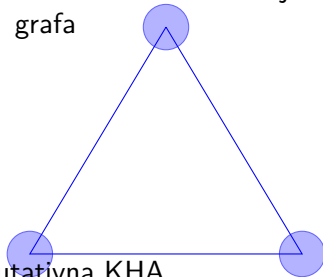


KHA grafova

Grafički zonotopi

R. Stanley, *A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph*, Adv. Math. (1995)

Hromatska
kvazisimetrična funkcija
grafa

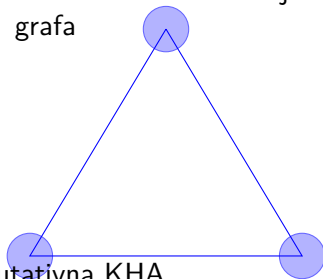


ne-kokomutativna KHA
grafova

Nestoedri,
grafički asociedri

V. Grujić, *Quasisymmetric functions for nestohedra*, SIAM J. Discrete Math. (2017),

Hromatska
kvazisimetrična funkcija
grafa



ne-kokomutativna KHA
grafova

Nestoedri,
grafički asociedri

V. Grujić, *Quasisymmetric functions for nestohedra*, SIAM J. Discrete Math. (2017),

Simetrične funkcije

Definition

Simetrična funkcija je formalni stepeni red $F \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ invarijantan u odnosu na permutacije promenljivih.

Jednu linearnu bazu, indeksiranu **particijama** prirodnih brojeva, čine **monomijalne simetrične funkcije**

$$\mathbf{m}_\lambda = \sum x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \cdots x_{i_j}^{\lambda_j}, \lambda \vdash k.$$

Važne slobodne algebarske baze čine elementarne, kompletne i stepene simetrične funkcije:

$$\mathbf{e}_n = m_{1^n} = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n},$$

$$\mathbf{h}_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda, \mathbf{p}_n = m_{(n)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^n.$$

Simetrične funkcije su blisko povezane sa reprezentacijama simetrične grupe S_n . Još jednu linearnu bazu indeksiranu particijama, čine **Šurove funkcije**

$$\mathbf{s}_\lambda = \sum_{T \in SSYT(\lambda)} \mathbf{x}^{w(T)}, \lambda \vdash n$$

Frobenijusova karakteristika reprezentacije je enumerator u bazi stepenih simetričnih funkcija

$$\text{ch}(\chi) = 1/n! \sum_{\pi \in S_n} \chi(\pi) \mathbf{p}_{c(\pi)},$$

gde je $c(\pi)$ ciklični tip permutacije. Šurove funkcije su karakteristike ireducibilnih reprezentacija

$$\mathbf{s}_\lambda = \text{ch}(\chi^\lambda), \lambda \vdash n.$$

Hromatska simetrična funkcija grafa

Definition

Bojenje prostog grafa $\Gamma = (V, E)$ je funkcija $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ takva da je

$$uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v).$$

Definition (R. Stanley, 1995.)

Hromatska simetrična funkcija grafa $\Gamma = (V, E)$ na n temena $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je enumerator svih bojenja

$$X(\Gamma) = \sum_{f: V \rightarrow \mathbb{N}} \mathbf{x}_f, \mathbf{x}_f = x_{f(v_1)} x_{f(v_2)} \cdots x_{f(v_n)}.$$

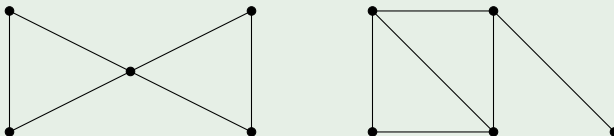
$X(\Gamma)$ jeste simetrična funkcija jer je permutacija bojenja takodje bojenje.

Razlaganje u bazi stepenih simetričnih funkcija je dato formulom

$$X(\Gamma) = \sum_{\pi \in L_{\Gamma}} \mu(\hat{0}, \pi) \mathbf{p}_{c(\pi)}.$$

Ovde je L_{Γ} mreža spona (bond lattice) grafa Γ i μ njena Mebijusova funkccija. Spona π je particija temena V u kojoj su svi indukovani podgrafovi povezani i $c(\pi)$ je njen tip. Primitimo sličnost sa Frobenijusovom karakteristikom.

Example (Grafovi sa istom hromatskom simetričnom funkcijom)



$$X(\Gamma_1) = X(\Gamma_2)$$

Glavna specijalizacija proizvodi hromatski polinom grafa

$$X(\Gamma)(1^n) = \chi_\Gamma(n).$$

$\chi_\Gamma(n)$ je jednak broju bojenja grafa Γ sa n boja.

Example

Sva drveta T na k temena imaju isti hromatski polinom
 $\chi_T(n) = n(n-1)^{k-1}$.

Hipoteza: Hromatska simetrična funkcija $X(T)$ razlikuje drveta.
Aciklična orijentacija grafa Γ je orijentacija njegovih ivica bez usmerenih ciklova.

Theorem (Teorema reciprociteta, Stanley, 1973.)

Broj acikličnih orijentacija grafa Γ je određen sa

$$a(\Gamma) = (-1)^{|V|} \chi_\Gamma(-1).$$



Grafički zonotop Z_Γ

Prost graf $\Gamma = ([n], E)$ definiše aranžman hiperravnini

$$\mathcal{A}_\Gamma = \{H_{ij} \mid ij \in E\}, H_{ij} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\},$$

koji nazivamo **grafički aranžman**.

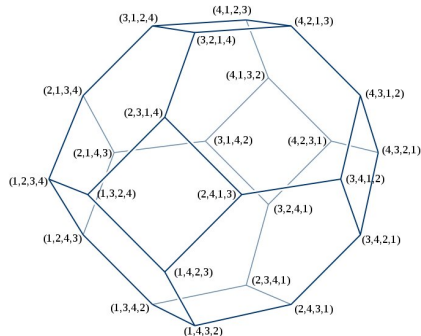
Grafički zonotop je politop čija je normalna lepeza $\mathcal{N}(Z_\Gamma)$ jednaka lepezi odgovarajućeg grafičkog aranžmana $\Sigma(\mathcal{A}_\Gamma)$. Mreža strana grafičkog zonotopa je određena mrežom strana lepeze grafičkog aranžmana

$$L(Z_\Gamma) \cong^{op} L(\Sigma(\mathcal{A}_\Gamma)).$$

Grafički zonotop je takodje suma Minkovskog intervala

$$Z_\Gamma = \sum_{ij \in E} [e_i, e_j].$$

Permutoedar $Pe^{n-1} = Z_{K_n}$ je grafički zonotop kompletnog grafa.
 Grafički aranžman kompletnog grafa je **aranžman pletenica** $\mathcal{A}_n$.



Enumerator celobrojnih tačaka

Skup bojenja grafa Γ i skup pozitivnih celobrojnih tačaka $\omega \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \mathcal{A}_\Gamma$ koje izbegavaju grafički aranžman $\mathcal{A}_\Gamma$ su jednaki. Dakle, hromatska simetrična funkcija grafa je enumerator tih celobrojnih tačaka

$$X(\Gamma) = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \mathcal{A}_\Gamma} \mathbf{x}_\omega, \quad \mathbf{x}_\omega = x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n}.$$

Svaki region grafičkog aranžmana zadaje jednu acikličnu orijentaciju grafa

$$r(\mathcal{A}_\Gamma) = |V(Z_\Gamma)| = a(\Gamma) = (-1)^{|V|} \chi_\Gamma(-1).$$

q -modifikacija $X_q(\Gamma)$

Koristeći funkciju ranga na normalnoj lepezi grafičkog zonotopa $\mathcal{N}(Z_\Gamma)$ definišemo sledeći **težinski enumerator** celobrojnih tačaka.

Definition

Za celobrojnu tačku $\omega \in \mathbb{Z}_+^n$ neka je G_ω jedinstvena strana grafičkog zonotopa Z_Γ takva da se ω nalazi u relativnoj unutrašnjosti njenog normalnog konusa u lepezi $\mathcal{N}(Z_\Gamma)$.

q -Hromatska simetrična funkcija grafa Γ je težinski enumerator

$$X_q(\Gamma) = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}_+^n} q^{\dim G_\omega} \mathbf{x}_\omega.$$

- Koeficijenti težinskog enumeratora $X_q(\Gamma)$ su simetrične funkcije

$$X_q(\Gamma) \in \text{Sym}[q].$$

- Za $q = 0$ dobijamo Stenlijevu hromatsku simetričnu funkciju grafa

$$X_0(\Gamma) = X(\Gamma).$$

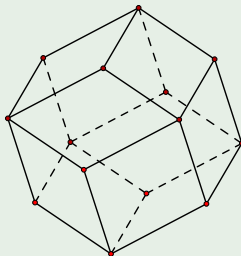
- Uopštenje Stenlijeve teoreme reciprociteta o acikličnim orijentacijama grafa

Theorem

f -polinom grafičkog zonotopa se dobija kao glavna specijalizacija

$$f(Z_\Gamma, q) = (-1)^{|V|} X_{-q}(\Gamma)(1^n) |_{n=-1}.$$

Example (Rombički dodekaedron $\mathcal{Z}_{C_4}$)



$$f(\mathcal{Z}_{C_4}, q) = 14 + 24q + 12q^2 + q^3.$$

Pitanja

- Dati kombinatornu interpretaciju koeficijenata $X_q(\Gamma) = \sum F_k(\Gamma)q^k$.
- Odrediti razvoje u standardnim bazama simetričnih funkcija.
- Naći neizomorfne grafove Γ_1 i Γ_2 sa istom q -hromatskom simetričnom funkcijom $X_q(\Gamma_1) = X_q(\Gamma_2)$.
- Ispitati da li q -hromatska funkcija $X_q(T)$ određuje izomorfni tip drveta T .

Kombinatorna Hopfova algebra grafova $\mathcal{G}$

Definition (Aguiar, Bergeron, Sottile, 2006.)

$(\mathcal{H}, \zeta)$ je **kombinatorna Hopfova algebra** (KHA) ako je $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_n$ graduisana, povezana Hopfova algebra i $\zeta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{k}$ je multiplikativni linearni funkcional, koji nazivamo **karakter**.

Antipod S je rekurzivno odredjen.

Example (1.KHA grafova $\mathcal{G}$)

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 &= \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2, \\ \Delta(\Gamma) &= \sum_{I \subset V} \Gamma|_I \otimes \Gamma|_{V \setminus I}, \\ \zeta(\Gamma) &= \begin{cases} 1, & \Gamma \text{ diskretan} \\ 0, & \text{ina}\check{c}e \end{cases}.\end{aligned}$$

Example (2. KHA simetričnih funkcija Sym)

$$\Delta(\mathbf{p}_n) = 1 \otimes \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n \otimes 1, \Delta(\mathbf{e}_n) = \sum_{i+j=n} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

$$\Delta(\mathbf{h}_n) = \sum_{i+j=n} \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_j, \Delta(\mathbf{s}_\lambda) = \sum_{\mu \subset \lambda} \mathbf{s}_\mu \otimes \mathbf{s}_{\lambda/\mu}.$$

$$\zeta(\mathbf{m}_\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = (n) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Theorem (Aguilar, Bergeron, Sottile 2006.)

KHA Sym je terminalni objekat u kategoriji ko-komutativnih kombinatornih Hopfovih algebri.

To znači da za svaku ko-komutativnu KHA $(\mathcal{H}, \zeta)$ postoji **jedinstveni** morfizam kombinatornih Hopfovih algebri

$$\Psi : (\mathcal{H}, \zeta) \rightarrow (\text{Sym}, \zeta_S).$$

Theorem

Za KHA grafova $(\mathcal{G}, \zeta)$ jedinstveni morfizam u KHA simetričnih funkcija $\Psi : (\mathcal{G}, \zeta) \rightarrow (\text{Sym}, \zeta_S)$ je hromatska simetrična funkcija grafa

$$\Psi(\Gamma) = X(\Gamma).$$

$$X(\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2) = X(\Gamma_1)X(\Gamma_2),$$

$$\Delta(X(\Gamma)) = (X \otimes X)\Delta(\Gamma),$$

$$S(X(\Gamma)) = X(S(\Gamma)).$$

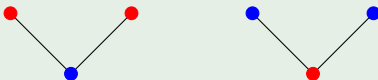
Uredjena bojenja grafova

Definition

Uredjeno bojenje prostog grafa $\Gamma = (V, E)$ je njegovo bojenje $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ takvo da nikoja dva monohromatska temena nisu povezana putem kroz temena obojena manjim bojama. Neka je $F(\Gamma)$ enumerator uredjenih bojenja grafa Γ

$$F(\Gamma) = \sum_{f: V \rightarrow \mathbb{N} \text{ uredjeno}} \mathbf{x}_f, \mathbf{x}_f = x_{f(v_1)} x_{f(v_2)} \cdots x_{f(v_n)}.$$

Example



Kvazisimetrične funkcije

Definition

Kvazisimetrična funkcija je formalni stepeni red $F \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ sa jednakim koeficijentima uz monome

$$[x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}] F = [x_{j_1}^{\alpha_1} x_{j_2}^{\alpha_2} \cdots x_{j_k}^{\alpha_k}] F,$$

za rastuće nizove indeksa $i_1 < i_2 < \cdots < i_k, j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

Enumerator uredjenih bojenja grafa $F(\Gamma)$ je kvazisimetrična funkcija.

Standardnu linearnu bazu čine **monomijalne kvazisimetrične funkcije**, indeksirane **kompozicijama** prirodnih brojeva

$$\mathbf{M}_\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}, \alpha \models n.$$

Kombinatorna Hopfova algebra $QSym$

$QSym$ je kombinatorna Hopfova algebra

$$\Delta(\mathbf{M}_\alpha) = \sum_{\beta\gamma=\alpha} \mathbf{M}_\beta \otimes \mathbf{M}_\gamma,$$

$$\zeta_Q(\mathbf{M}_\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = (n) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Veza izmedju monomijalnih simetričnih i kvazisimetričnih funkcija je data sa $\mathbf{m}_\lambda = \sum_{s(\alpha)=\lambda} \mathbf{M}_\alpha, \lambda \vdash n, \alpha \models n$.

Theorem (Aguiar, Bergeron, Sottile, 2006.)

Za svaku KHA $(\mathcal{H}, \zeta)$ postoji **jedinstveni** morfizam kombinatornih Hopfovih algebri $\Psi : (\mathcal{H}, \zeta) \rightarrow (QSym, \zeta_Q)$.

KHA grafova $\tilde{\mathcal{G}}$

Definition

Operacija **sažimanja** grafa $\Gamma = (V, E)$ po skupu temena $I \subset V$ proizvodi novi graf $\Gamma/I = (V \setminus I, \tilde{E})$, gde $uv \in \tilde{E}$ ako i samo ako

- $uv \in E$ ili
- postoji put $uv_1v_2 \cdots v_kv$ takav da $v_1, v_2, \dots, v_k \in I$.

KHA grafova $\tilde{\mathcal{G}}$ definisana je operacijama

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 &= \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2, \\ \Delta(\Gamma) &= \sum_{I \subset V} \Gamma|_I \otimes \Gamma/I, \\ \zeta(\Gamma) &= \begin{cases} 1, & \Gamma \text{ diskretan} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.\end{aligned}$$

Theorem

Za KHA grafova $(\tilde{\mathcal{G}}, \zeta)$ jedinstveni morfizam u KHA kvazisimetričnih funkcija $\Psi : (\mathcal{G}, \zeta) \rightarrow (QSym, \zeta_Q)$ je **hromatska kvazisimetrična funkcija grafa**

$$\Psi(\Gamma) = F(\Gamma).$$

- Koeficijenti u monomijalnoj bazi $F(\Gamma) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_{\alpha}(\Gamma) \mathbf{M}_{\alpha}$ određuju broj uredjenih bojenja tipa α .
- Glavna specijalizacija $\tilde{\chi}(\Gamma, m) = F(\Gamma)(1^m)$ je **hromatski polinom uredjenih bojenja**.

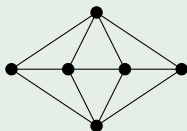
Theorem

Invarijanta $F(\Gamma)$ se ponaša rekurzivno u odnosu na brisanje temena

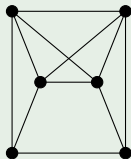
$$F(\Gamma) = \sum_{v \in V} F(\Gamma \setminus v)_1.$$

U kakvom su odnosu hromatske simetrična $\chi(\Gamma)$ i kvazisimetrična funkcija grafa $F(\Gamma)$?

Example



Γ_1



Γ_2

$$\chi(\Gamma_1) = 3, \chi(\Gamma_2) = 4$$

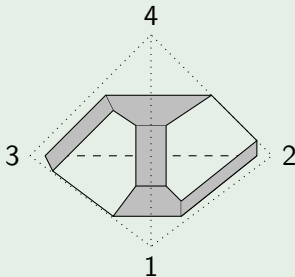
$$F_{\Gamma_1} = F_{\Gamma_2} = 24M_{(1,2,1,1,1)} + 96M_{(2,1,1,1,1)} + 720M_{(1,1,1,1,1,1)}$$

Graf-asociedri P_Γ

Definition

Graf-asociedar P_Γ je konveksni politop pridružen grafu Γ , dobijen trunkacijama standardnog simpleksa po stranama određenim povezanim podgrafovima.

Example



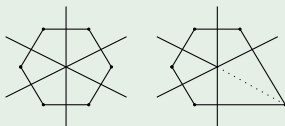
Normalna lepeza $\mathcal{N}(P_\Gamma)$ graf-asociedra P_Γ je profinjena lepezom aranžmana pletenica. Ovo je uslov koji definiše klasu politopa poznatih kao **uopšteni permutoedri**.

Theorem

*Hromatska kvazisimetrična funkcija grafa $F(\Gamma)$ je enumerator **generičkih** pozitivnih celobrojnih tačaka normalne lepeze graf-asociedra P_Γ .*

Tačka je generička ako se nalazi u unutrašnjosti normalnog konusa nekog temena.

Example



q -modifikacija $F_q(\Gamma)$

Koristeći funkciju ranga na normalnoj lepezi graf-asociedra $\mathcal{N}(P_\Gamma)$ definišemo sledeći **težinski enumerator** celobrojnih tačaka.

Definition

Za celobrojnu tačku $\omega \in \mathbb{Z}_+^n$ neka je G_ω jedinstvena strana graf-asociedra P_Γ takva da se ω nalazi u relativnoj unutrašnjosti njenog normalnog konusa u lepezi $\mathcal{N}(P_\Gamma)$. **q -Hromatska kvazisimetrična funkcija grafa Γ** je težinski enumerator

$$F_q(\Gamma) = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}_+^n} q^{\dim G_\omega} \mathbf{x}_\omega.$$

Theorem

q -Hromatska kvazisimetrična funkcija $F_q(\Gamma)$ je određena sledećim rekurzivnim relacijama

- $F_q(\bullet) = M_1,$
- $F_q(\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2) = F_q(\Gamma_1)F_q(\Gamma_2),$
- $F_q(\Gamma) = \sum_{I \subsetneq V} q^{n-|I|-1} (F_q(\Gamma|_I))_{n-|I|}.$

Example

- $q^5 M_{(6)}$
- $q^4 (6M_{(1,5)} + 6M_{(5,1)} + 11M_{(2,4)} + 15M_{(4,2)} + 18M_{(3,3)})$
- $q^3 (30M_{(1,1,4)} + 30M_{(1,4,1)} + 30M_{(4,1,1)} + 66M_{(2,2,2)} + 4M_{(2,4)} + 2M_{(3,3)} + 56M_{(1,2,3)} + 60M_{(1,3,2)} + 44M_{(2,1,3)} + 44M_{(2,3,1)} + 54M_{(3,1,2)} + 54M_{(3,2,1)})$
- $q^2 (108M_{(3,1,1,1)} + 120M_{(1,3,1,1)} + 120M_{(1,1,3,1)} + 120M_{(1,1,1,3)} + 180M_{(1,1,2,2)} + 168M_{(1,2,1,2)} + 168M_{(1,2,2,1)} + 132M_{(2,1,1,2)} + 132M_{(2,1,2,1)} + 132M_{(2,2,1,1)} + 4M_{(1,2,3)} + 16M_{(2,1,3)} + 16M_{(2,3,1)} + 6M_{(3,1,2)} + 6M_{(3,2,1)} + 24M_{(2,2,2)})$
- $q^1 (360M_{(1,1,1,1,2)} + 360M_{(1,1,1,2,1)} + 360M_{(1,1,2,1,1)} + 336M_{(1,2,1,1,1)} + 264M_{(2,1,1,1,1)} + 12M_{(1,2,1,2)} + 12M_{(1,2,2,1)} + 48M_{(2,1,1,2)} + 48M_{(2,1,2,1)} + 48M_{(2,2,1,1)} + 12M_{(3,1,1,1)})$
- $q^0 (720M_{(1,1,1,1,1,1)} + 96M_{(2,1,1,1,1)} + 24M_{(1,2,1,1,1)})$

Example

- f -polinomi graf-asociedara P_{Γ_1} i P_{Γ_2} su jednaki

$$f(q) = q^5 + 56q^4 + 462q^3 + 1308q^2 + 1500q + 600.$$

- Medjutim, politopi **nisu** kombinatorno ekvivalentni $P_{\Gamma_1} \not\cong P_{\Gamma_2}$ jer im dualni 1-skeletoni imaju različite nizove stepena temena.

V. Grujić, *Counting faces of graphical zonotopes*, Ars Math. Contemporanea, (2017),
V. Grujić, M. Pešović, T. Stojadinović, *Weighted quasisymmetric enumerator for generalized permutohedra*, Journal Alg. Combinatorics, (2019),