

ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ВЕРОВАТНОЋЕ

18. јануар 2024.

- Из унутрашње области троугла T са теменима $(0,0)$, $(0,3)$ и $(2,0)$, на случајан начин се бира тачка A . Ако су обе координате тачке A мање од 1, извлаче се три куглице, једна по једна, са враћањем, из кутије која садржи 2 плаве, 2 црвене и 3 зелене куглице, а ако је бар једна координата тачке A већа од 1, из исте кутије се извлачи само једна куглица. Израчунати очекивани број извучених зелених куглица.

Решење: Нека је X - број извучених зелених куглица. Уведимо следеће хипотезе:

H_1 : обе координате тачке A су мање од 1 (у том случају извлачимо три куглице)

H_2 : бар једна координата је већа од 1 (у том случају извлачимо само једну куглицу)

Како је површина квадрата са теменима $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ једнака 1, а површина троугла T једнака 3, добијамо да је $P(H_1) = \frac{1}{3}$, док је $P(H_2) = 1 - P(H_1) = \frac{2}{3}$.

Сада можемо да одредимо расподелу случајне величине X .

$$P\{X = k\} = P\{X = k|H_1\}P(H_1) + P\{X = k|H_2\}P(H_2),$$

па је тако:

$$P\{X = 0\} = \left(\frac{4}{7}\right)^3 \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \frac{2}{3}$$

$$P\{X = 1\} = 3 \left(\frac{4}{7}\right)^2 \frac{3}{7} \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \frac{2}{3}$$

$$P\{X = 2\} = 3 \left(\frac{3}{7}\right)^2 \frac{4}{7} \frac{1}{3}$$

$$P\{X = 3\} = \left(\frac{3}{7}\right)^3 \frac{1}{3}$$

Коначно, очекивани број извучених зелених куглица је:

$$EX = 1P\{X = 1\} + 2P\{X = 2\} + 3P\{X = 3\} = \frac{245}{343}.$$

- За густину расподеле случајног вектора (X, Y) важи да је

$$f(x, y) = 6(1 - x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x.$$

Ако је $Z = 2X - Y$, а $H = X - 2Y$, израчунати коефицијент корелације случајних величина Z и H .

Решење: Тражени коефицијент корелације рачуна се по формули

$$\rho_{Z,H} = \frac{EZH - EZEH}{\sqrt{DZ}\sqrt{DH}}$$

Како су Z и H линеарне комбинације случајних величина X и Y , на основу особина очекивања довољно ће нам бити да знамо расподелу за X и Y , односно заједничку расподелу случајног вектора (X, Y) . Нађимо прво маргиналне густине:

$$f_X(x) = \int_0^x 6(1 - x)dy = 6x(1 - x), \quad x \in (0, 1)$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 6x(1 - x)dx = 3y^2 - 6y + 3, \quad y \in (0, 1)$$

На основу добијених расподела рачунамо одговарајуће моменте:

$$EX = \int_0^1 x6x(1-x)dx = \frac{1}{2}, \quad EX^2 = \int_0^1 x^26x(1-x)dx = \frac{3}{10}$$

$$EY = \int_0^1 y(3y^2 - 6y + 3)dy = \frac{1}{4}, \quad EY^2 = \int_0^1 y^2(3y^2 - 6y + 3)dy = \frac{1}{10}$$

$$EXY = \int_0^1 \int_0^x xy6(1-x)dydx = \frac{3}{20}$$

Одатле добијамо и моменте за Z и H :

$$EZ = 2EX - EY = \frac{3}{4}$$

$$EH = EX - 2EY = 0$$

$$DZ = 4EX^2 - 4EXY + EY^2 - (EZ)^2 = \frac{11}{80}$$

$$DH = EX^2 - 4EXY + 4EY^2 - (EH)^2 = \frac{1}{10}$$

$$EZH = 2EX^2 - 5EXY + 2EY^2 = \frac{1}{20}$$

Након што уврстимо добијене вредности у формулу, добијамо $\rho_{Z,H} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

3. За карактеристичну функцију општег члана X_n низа независних случајних величина важи да је $\varphi_n(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \cos(4t)) + \frac{i}{4}\sin t$. Ако је $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^3$, испитати конвергенције у расподели и вероватноћи низа случајних величина (Y_n) .

Решење: Познато је да карактеристична функција једнозначно одређује расподелу, па хоћемо да основу дате одредимо коју расподелу има општи члан X_n . Како је

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ и } \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

добијамо

$$\varphi_n(t) = \frac{3}{8}e^{it} + \frac{1}{8}e^{-it} + \frac{1}{4}e^{4it} + \frac{1}{4}e^{-4it},$$

одакле закључујемо да је расподела $X_n : \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,

односно

$$X_n^3 : \begin{pmatrix} -64 & -1 & 1 & 64 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Низ (X_n^3) је низ независних случајних величина са истом расподелом и коначним очекивањем $EX_1^3 = \frac{1}{4}$, па за њега важи Хинчинов закон великих бројева, што значи

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^3 \xrightarrow{P} \frac{1}{4},$$

што повлачи и конвергенцију у расподели $Y_n \xrightarrow{d} \frac{1}{4}$, $n \rightarrow \infty$.