

ТЕОРИЈА РИЗИКА

КОЛОКВИЈУМ - 3. јун 2023.

1. а) Нека је $N = \{N(t), t \geq 0\}$ бројачки процес обнављања. Показати да $m(t) = EN(t) + 1$ задовољава једначину обнављања.
б) Ако за тренутке обнављања (T_k) важи да $Y_k = T_k - T_{k-1}$ има гама $\gamma(2, \lambda)$, за $\lambda > 0$, одредити функцију обнављања $m(t)$.
2. а) Написати израз за Лапласову трансформацију $\psi_N(g)$, где је N Пуасонова случајна мера.
б) Нека је η случајна величина са Пуасоновом $\mathcal{P}(1)$ расподелом, независна од низа независних и једнако расподељених случајних величина (X_i) чија је маргинална густина f позитивна на $(0, \infty)$. Показати да

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\eta} I_{(0,t]}(X_i), \quad t \geq 0,$$

дефинише Пуасонову случајну меру на $E = (0, \infty)$ и одредити њену средњу меру. Испитати да ли је овим дефинисан хомоген Пуасонов процес на $(0, \infty)$.

- в) Нека је N Пуасонова случајна мера на $E = (0, 1]$ са средњом мером λLeb , $\lambda > 0$, која има репрезентацију $N = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{X_i}$. Показати да $\sum_{i \geq 1} e^{-X_i}$ има репрезентацију преко сложене Пуасонове величине и одредити расподелу свих случајних величина које се јављају у тој репрезентацији.
3. Нека је N Хоуксов тачкасти процес који је одређен условним интензитетом

$$\lambda(t) = 1 + \sum_{i: T_i \leq t} e^{-(t-T_i)}.$$

Израчунати $EN^2(t)$.

4. Испитати слабу конвергенцију низа тачкастих процеса (N_n) на простору $E = (0, 1]$, за

$$N_n(\cdot) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\frac{i}{n}}(\cdot) I_{\{X_i > 1 - \frac{x}{n}\}}, \quad \text{за } x > 0,$$

где су (X_i) независне и једнако расподељене са униформном расподелом на интервалу $(0, 1]$.