

Пуасонов процес

- Нека је N Пуасонов процес са непрекидном и строго растућом функцијом средње вредности μ и нека је $\tilde{N}$ стандардан хомоген Пуасонов процес.
 - Показати да је $\{N_1(t), t \geq 0\}$ дефинисан са $N_1(t) = \tilde{N}(\mu(t))$ такође Пуасонов процес.
 - Ако је $N_2(t) = N(\mu^{-1}(t))$, показати да је $\{N_2(t), t \geq 0\}$ стандардан хомоген Пуасонов процес.
- Нека је $\{\tilde{T}_n, n \in \mathbb{N}\}$ низ тренутака реализација догађаја у стандардном хомогеном Пуасоновом процесу $\tilde{N}$. Ако је N_1 бројачки процес ком одговарају тренуци $T_n = \tilde{T}_n^2$, показати да је то нехомоген Пуасонов процес и одредити његову функцију средње вредности.
- У Пуасоновом процесу $N = \{N(t), t \geq 0\}$ са интензитетом $\lambda > 0$ сваки реализован догађај се региструје независно од осталих са вероватноћом $p, 0 < p < 1$. Нека је случајан процес $\{N_1(t), t \geq 0\}$ дефинисан тако да $N_1(t)$ представља број регистрованих од свих реализованих догађаја у процесу N у интервалу $[0, t]$. Испитати да ли је N_1 такође Пуасонов процес.
- Нека је N Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$. Претпоставимо да сваки реализован догађај може бити класификован као догађај типа 1 или типа 2 са вероватноћама p_1 и p_2 , независно од других догађаја при чему је $p_1 + p_2 = 1$. Нека су $N_1(t)$ и $N_2(t)$, број догађаја типа 1, односно типа 2, редом, у интервалу $[0, t]$. Показати да су тада $N_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$ и $N_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$ независни Пуасонов процеси са интензитетима $\lambda p_1, \lambda p_2$.
- Познато је да се догађаји типа 1 дешавају у складу са процесом N_1 , а догађаји типа 2 у складу са процесом N_2 . Нека су N_1 и N_2 независни хомогени Пуасонов процеси са интензитетима λ_1 и λ_2 , редом.
 - Показати да је тада $N = N_1 + N_2$ Пуасонов процес са интензитетом $\lambda_1 + \lambda_2$.
 - Нека је Z_k дужина чекања између $(k-1)$ -ог и k -тог догађаја у процесу N и $I_k = i$ ако је k -ти догађај у процесу N типа $i = 1, 2$. Тада важи

$$P\{I_k = i | Z_k > t\} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad i = 1, 2,$$

независно од $t > 0$.

- Нека је N хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$. Одредити условну расподелу случајне величине $N(s) | N(t) = n$ за $0 < s < t$.
- Нека су N_1 и N_2 независни Пуасонов процеси са интензитетима λ_1 и λ_2 , редом. Израчунати вероватноћу да се n догађаја типа 1 деси пре m догађаја типа 2.
- Посматрају се одштетни захтеви који пристижу у складу са хомогеним Пуасоновим процесом са интензитетом λ . Посматрамо портфолио осигурања у тренутку $t > 0$.
 - Одредити расподелу случајне величине $B(t)$ -времена протеклог од последњег захтева до тренутка t .
 - Одредити расподелу случајне величине $C(t)$ -времена чекања на наредни одштетни захтев.
 - Показати да су $B(t)$ и $C(t)$ независне.

(д) Испитати да ли збир случајних величина из дела а) и б) има експоненцијалну расподелу.

9. Нека је N Пуасонов процес са функцијом средње вредности μ и непрекидном, с.с. позитивном функцијом интензитета λ . Ако је $Y_n = \int_{T_n}^{T_{n+1}} \lambda(t) dt$, показати да су (Y_n) независне и једнако расподељене случајне величине.

10. Нека је N Пуасонов процес са непрекидном и с.с. позитивном функцијом интензитета λ . Одредити заједничку расподелу вектора

(а) $(T_1, T_2, \dots, T_n)$;

(б) $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

11. Нека је N Пуасонов процес са непрекидном, с.с. позитивном функцијом интензитета λ . Тада

$$(T_1, T_2, \dots, T_n | N(t) = n) \stackrel{d}{=} (X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}),$$

где су $(X_{(k)})$ статистике поретка простог случајног узорка из расподеле $f(x) = \frac{\lambda(x)}{\mu(t)}$, $x \in [0, t]$. Специјално, за хомоген Пуасонов процес, $(X_{(k)})$ су статистике поретка узорка из униформне $\mathcal{U}[0, t]$ расподеле.

12. (*Shot – noise process*) Нека је

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} g(t, T_k, X_k),$$

где је су (T_k) тренуци реализација догађаја у хомогеном Пуасоновом процесу N , независни од (X_k) , ненегативних, међусобно независних и једнакорасподељених величина одштета. Ако је

а) $g(t, s, x) = x$;

б) $g(t, s, x) = xe^{-r(t-s)}$,

израчунати $ES(t)$ и $D(S(t))$.

13. Нека је N хомоген Пуасонов процес. Показати да важи

$$\left(\frac{T_1}{T_{n+1}}, \dots, \frac{T_n}{T_{n+1}} \right) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, \dots, U_{(n)}).$$

14. Показати да $Y_n = T_n - T_{n-1}$ у општем случају немају исту расподелу.

15. Нека је N хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$ и $f : [0, \infty)$ непрекидна функција. Ако се неки догађај деси и тренутку $s > 0$, он се региструје са вероватноћом $f(s)$. Нека је $N_1(t)$ број регистрованих догађаја у интервалу $[0, t]$. Испитати да ли је $\{N_1(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес.

16. Генерисати једну трајекторију

а) хомогеног;

б) нехомогеног,

Пуасоновог процеса.

17. Власници полиса осигурања неке осигуравајуће компаније учествују у саобраћајним незгодама у тренуцима који су у складу са хомогеним Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Време које протекне од тренутка незгоде до тренутка када се упуту захтев има функцију расподеле G .

- а) Одредити вероватноћу да постоји тачно n насталих, али још увек неупућених захтева за одштету до тренутка $t > 0$.
- б) Претпостави се да свака величина захтева има расподелу F и да она не зависи од количине времена које протекне до тренутка $t > 0$. Одредити очекивану вредност суме насталих и упућених захтева до тренутка t .
18. Нека је N мешовити Пуасонов процес са функцијом средње вредности $\mu(t) = t$ и мешајућом променљивом M која има гама $\gamma(n, \alpha)$ расподелу.
- а) Наћи расподелу прираштаја овог процеса,
- б) Показати да прираштаји нису независни.
19. Осигуравајућа компанија сматра да сваки од власника полисе има своју процењену вредност и да власник полисе који има своју процењену вредност λ упућује захтеве у складу са Пуасоновим процесом у просеку λ захтева у току једне године. Компаније сматра да процењене вредности варирају у складу са $\mathcal{U}[0, 1]$ расподелом. Ако власник има n захтева у првих t година, одредити расподелу количине времена које протекне до следећег захтева.
20. Нека су (T_n) тренуци реализација догађаја у Пуасоновом процесу N са функцијом средње вредности μ и (X_n) величине одштета, међусобно независне са маргиналном расподелом F , $F(0) = 0$, независне од (T_n) . Нека је M бројачки процес дефинисан на следећи начин:

$$M(a, b) = |\{i \in \mathbb{N} : X_i \leq a, T_i \leq b\}|, \quad a, b > 0.$$

Одредити расподелу случајне величине $M(a, b)$.

21. Нека је N хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$. Одредити расподелу случајне величине $X_{(N(t)-k+1)}$.
22. Нека је N хомоген Пуасонов процес са интензитетом λ и S збирни Пуасонов процес,

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t > 0.$$

- а) Показати да случајне величине $S(t-s)$ и $S(s, t]$, $0 \leq s < t$, имају исту расподелу (стационарност прираштаја).
- (а) Испитати независност прираштаја $S(t_1), S(t_1, t_2], \dots, S(t_{n-1}, t_n]$.
- (б) Нека величине одштета X_n имају гама $\gamma(2, \beta)$ расподелу. Апроксимирати вероватноћу $P\{S(t) > 50\}$.
23. Нека су $S_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_j^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ случајне величине које имају сложену Пуасонову расподелу, при чему N_i имају Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda_i)$ расподелу, независне су за $i \neq j$ и све $(X_j^{(i)})$ су међусобно независне. Показати да $\tilde{S} = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ има такође сложену Пуасонову расподелу.

Расподеле величина одштета

24. Испитати да ли су следеће расподеле имају лак или тежак реп.
- а) гама $\gamma(\alpha, \beta)$
- б) Паретова $PA(a, b)$
25. Показати да се експоненцијалном трансформацијом случајних величина са гама, нормалном и експоненцијалном расподелом добијају расподеле са тешким репом.

26. Испитати за које вредности параметра $\tau > 0$ расподела $F(x) = 1 - e^{-cx^\tau}$, $x > 0$, $c > 0$ има лак, односно тежак реп.

27. Одредити функцију средњег прекорачења за X из експоненцијалне расподеле.

28. Показати да важи

$$e_F(u) = \frac{1}{\overline{F}(u)} \int_u^\infty \overline{F}(t) dt.$$

29. Нека X има Паретову $PA(a, b)$ расподелу. Показати да је X правилно променљива и израчунати EX^δ , за $\delta > 0$.

30. Показати да је Фрешеова расподела, $F(x) = e^{-x^{-\alpha}}$, $x > 0$, $\alpha > 0$ правилно променљива (у бесконачности) и одредити индекс правилне променљивости.

31. Показати да експоненцијална расподела није субекспоненцијална.

32. Показати да $F(x) = 1 - e^{-x^\tau}$, $x > 0$, $\tau > 1$ није из класе субекспоненцијалних расподела.

33. Нека је X случајна величина са функцијом расподеле F и $x_F = +\infty$. Ако за свако $y \in \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} = e^{\gamma y},$$

за неко $\gamma \in [0, \infty]$, показати да тада $e_F(u) \rightarrow \frac{1}{\gamma}$, $u \rightarrow \infty$.

34. Показати да је $F(x) = 1 - e^{-cx^\tau}$, $x > 0$, $c > 0$, $\tau \in (0, 1)$, субекспоненцијална.

35. Нека је F из класе субекспоненцијалних расподела. Ако су X и Y независне, ненегативне и имају расподелу F , показати да важи

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P\{X \leq z | X + Y > x\} = \frac{F(z)}{2}, \quad z > 0.$$

36. Показати да X за коју важи $P\{X = 2^k\} = \frac{1}{2^k}$, $k \geq 1$ има тежак реп, али не и дугачак реп.

37. Нека је F из класе субекспоненцијалних расподела и $S(t)$ збирни Пуасонов процес чији сабирци имају расподелу F . Одредити асимптотско понашање десног репа случајне величине $S(t)$, за неко $t > 0$.

38. Показати да је нормална расподела 2-стабилна.

39. Показати да је Кошијева расподела 1-стабилна.

40. Показати да су Гумбелова, Фрешеова и Вејбулова расподела максимум стабилне.

41. Испитати којој области привлачења за максимум припада Паретова расподела. Одредити нормирајуће константе.

42. Испитати којој области привлачења за максимум припада Кошијева расподела. Одредити нормирајуће константе.

43. Показати да униформна расподела припада области привлачења Вејбулове расподеле, $D(G_{2,1})$.

44. Показати да Експоненцијална расподела припада области привлачења Гумбелове расподеле.

Теорија разарања

45. Нека је $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ случајно лутање са $Z_i = X_i - cY_i$. Претпостави се да важи $EZ_1 = 0$ и $DZ_1 < \infty$. Показати да је

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) \geq 1 - \Phi(0) = 0.5.$$

46. Посматрамо овакав модел: Нека је

$$K(t) = u + p_1(t) - S(t),$$

где је $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_k$ укупна вредност одштетних захтева до тренутка t , (X_i) је низ независних, једнако расподељених, позитивних случајних величина одштетних захтева, независан од Пуасоновог процеса N , који има с.с. позитивну и непрекидну функцију интензитета $\lambda(t)$.

Нека је $p_1(t) = c \int_0^t \lambda(s) ds$, где је $c > 0$ брзина акумулације капитала.

- а) Показати да се вероватноћа разарања $\psi_1(u)$ поклапа са вероватноћом разарања у К-Л моделу.
- б) Који услов мора бити испуњен да би се избегло разарање са вероватноћом 1?
47. Нека је дат Крамер-Лундбергов модел са интензитетом Пуасоновог процеса $\lambda > 0$ и нека величине одштета (X_k) имају гама $\gamma(\alpha, \beta)$ расподелу. Претпоставимо да важи услов чистог профита. Израчунати Лундбергов коефицијент A , за $\alpha = 1, 2$.
48. Нека је К-Л моделу $X_1 \in \gamma(2, 2)$ и заштитни додатак 10%. Одредити горњу границу за вероватноћу разарања.
49. Нека је К-Л моделу $X_1 \in \gamma(2.5, 2.5)$ и заштитни додатак 5%. Одредити горњу границу за Лундбергов коефицијент A и одредити његову приближну вредност (неком нумеричком методом).
50. Дат је К-Л модел са хомогеним Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Величине одштета имају експоненцијалну $\mathcal{E}(\alpha)$ расподелу. Одредити вероватноћу преживљавања као функцију од почетног капитала u .
51. Дат је К-Л модел са хомогеним Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Величине одштета имају мешовиту експоненцијалну расподелу, мешавину $\mathcal{E}(2)$ и $\mathcal{E}(\frac{2}{3})$ расподеле са једнаким тежинама. Одредити вероватноћу разарања као функцију од почетног капитала u , ако је заштитни додатак 10%.
52. Претпоставимо да је у К-Л моделу $EX_1 < \infty$, X_1 је апсолутно непрекидног типа и важи услов чистог профита. Нека су $(X_{I,k})$ *i.i.d.* са расподелом $F_{X_1, I}$, где је $F_{X_1, I}$ интегрална расподела за F_{X_1} . Тада

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} P \{ X_{I,1} + \dots + X_{I,n} \leq u \} \right)$$

задовољава једначину

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} + \frac{1}{1 + \rho} \int_0^u \varphi(u - y) dF_{X_1, I}(y).$$

53. Израчунати вероватноћу преживљавања $\Psi(u)$ за $X_1 \in \mathcal{E}(\lambda)$ користећи репрезентацију из претходног задатка.

54. Нека важе претпоставке из претходног задатка и нека је додатно $F_{X_1, I}$ из класе субекспоненцијалних расподела. Показати да тада

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Psi(u)}{\overline{F}_{X_1, I}(u)} = \frac{1}{\rho}.$$

55. Показати да ако је $\overline{F} \in \text{ПП}_{-\alpha}$, за $\alpha > 1$, онда је $\overline{F}_I \in \text{ПП}_{-(\alpha-1)}$. Одредити асимптотско понашање вероватноће разарања у случају одштета из Паретове $PA(a, b)$ расподеле, за $a > 1, b > 0$. Упоредити са вероватноћом преживљања за мале одштете.