Теорија бројева

1. Одредити (a, b) и записати га као $\mathbb{Z}-$линеарну комбинацију бројева a и b ако су бројеви a и b:

а) 89 и 55
б) 171 и 67
в) 342 и 134
г) 498 и 318.

2. Ако постоји $\mathbb{Z}-$линеарна комбинација бројева a и b која је једнака d_1 и ако постоји $\mathbb{Z}-$линеарна комбинација бројева a и c која је једнака d_2, доказати да постоји и $\mathbb{Z}-$линеарна комбинација бројева a и bc која је једнака $d_1 d_2$.

3. Разлика два непарна броја једнака је 2^n за неко $n \in \mathbb{N}$. Доказати да су они узајамно прости.

4. Са колико нула се завршава декадни запис броја 2026!?

5. Колико целих делилаца има број 19!?

6. Нека $\tau(n)$ означава број природних делилаца природног броја n. Одредити све природне бројеве $n < 200$ за које важи $4 \mid n$, $3 \mid n$ и $\tau(n) = 12$.

7. а) Доказати да је $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ уколико су бројеви m и n узајамно прости.
б) Да ли дата једнакост важи и уколико бројеви m и n нису узајамно прости?
в) Да ли дата једнакост важи за узајамно просте m и n уколико $\tau(n)$ дефинишемо као број целих делилаца природног броја n?

8. Доказати да за свако n

а) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, где је $n \geqslant 0$
б) $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$, где је $n \geqslant 0$
в) $168 \mid 4^{2n} - 3^{2n} - 7$, где је $n \geqslant 1$
г) $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$ је дељив са 2^n, али није дељив са 2^{n+1}, где је $n \geqslant 1$.

9. а) Ако је $x \equiv y \pmod{m}$ и $d \mid m$, тада је $x \equiv y \pmod{d}$.
б) Ако је $x \equiv y \pmod{m}$ и $x \equiv y \pmod{n}$, тада је и $x \equiv y \pmod{[m, n]}$.

10. Одредити најмањи природан број који при дељењу са 4, 6, 8, 10 и 12 даје редом остатке 2, 4, 6, 8 и 10.

11. Одредити све природне бројеве n са бар две цифре чији је двоцифрени завршетак једнак двоцифреном завршетку броја n^2.

12. Одредити остатак броја $2222^{5555} + 5555^{2222}$ при дељењу са 7.

13. Одредити двоцифрени завршетак броја 3^{2026}.

14. Одредити n уколико је $\varphi(n) = 3600$ и ако су 3, 5 и 7 једини прости фактори броја n.

15. Ако су p и q различити прости бројеви, доказати да $pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.

16. Доказати да за сваки прост број p и за сваки цео број a, $p \mid a^p + (p-1)!a$.

17. Наћи најмањи природан број x за који је

$$x \equiv 5 \pmod{7}$$
$$x \equiv 7 \pmod{11}$$
$$x \equiv 3 \pmod{13}.$$

18. Решити систем конгруенција:

$$x \equiv 10!11! \pmod{23}$$
$$x \equiv 7^{12^{19}} \pmod{11}.$$

19. Одредити остатак броја $(51!36!)^{90}$ при дељењу са 89.

20. Одредити остатак броја $2025^{2026} + (10! + 1)^{2027}$ при дељењу са 385.

21. Одредити остатак при дељењу броја $(20!31!)^{39^7}$ са 53.

22. Решити линеарне Диофантове једначине:
а) $8x + 15y = 101$
б) $18x + 30y = 102$
в) $6x + 14y = 53$
г) $15x + 25y = 67$.

23. У скупу $\mathbb{Z}$ решити једначине:
а) $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$
б) $2x^2 - xy - y^2 + 2x + 7y = 84$
в) $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0$
г) $x^2 + 4y^2 + z^4 = 2x - 20y - 23$.

24. Колико има парова (x, y) целих бројева за које је $(x + y + 1988)^2 = x^2 + y^2 + 1988^2$?

25. Доказати да следеће једначине у скупу $\mathbb{Z}$ имају само тривијално решење $(0, 0, 0)$.
а) $x^2 + y^2 = 3z^2$
б) $x^2 + 2y^2 + 5xy = 5z^2$.

26. Доказати да следеће једначине немају решења у скупу целих бројева:
а) $x^3 + y^3 + z^3 = 2021$
б) $x^4 + y^4 + z^4 = 2020$
в) $3x^2 + 5y^2 = 4444$
г) $14x^2 - 3y^2 = 5$.

27. У скупу природних бројева решити једначину $5^x - 2^y = 1$.

28. Одредити све просте бројеве p такве да:
а) $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$ и $p + 14$ су такође прости
б) $2p^2 + 1$ је такође прост.

29. Одредити све двоцифрене бројеве $\overline{ab}$ који деле троцифрен број $\overline{a3b}$.

30. Доказати да број $\overline{234234\ldots23441}$ није квадрат природног броја (блок 234 се понавља $n \in \mathbb{N}_0$ пута, након чега следи двоцифрени завршетак 41).

31. Да ли постоји природан број који се у декадном запису завршава са 11, који је дељив са 11 и чији је збир цифара 11?

32. Одредити цифре које стоје уместо звездица у декадном запису броја
а) $109^{10} = 23673 * *67459211723401$.
б) $28! = 30488 * 346611713860501504 * 00000$.

33. Нека $S(n)$ означава збир цифара природног броја n. Одредити све природне бројеве n такве да је $n + S(n) = 2026$.