

Kardinalnosti

Stav: Za dva konačna skupa A i B
važi $|A| = |B|$ akko postoji bijekcija $f: A \rightarrow B$,
a $|A| \leq |B|$ akko postoji "1-1" $f: A \rightarrow B$

Def: Skupovi A i B su iste kardinalnosti ($|A| = |B|$)
akko postoji bijekcija $f: A \rightarrow B$, a skup A
je manji od skupa B ($|A| < |B|$) akko
postoji "1-1" $f: A \rightarrow B$

Teorema: Relacija jednakosti kardinalnosti je
ekvivalencija, a relacija $\leq$ kardinalnosti je
linearan poredak.

Bitne beskonačne kardinalnosti:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 \quad (\text{prebrojiva beskonačnost})$$

$$|\mathbb{R}| = c \quad (\text{kontinuum})$$

$$c > \aleph_0$$

1. Dokazati da je $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}|$.

Konstruisačemo bijekciju $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$
Imamo deljenje sa ostatkom u $\mathbb{N}$

$$n = 3q + r \quad r \in \{0, 1, 2\}$$

jedinstveno predstavljanje ($7 = 3 \cdot 2 + 1$)

$$f(n) = (q, r)$$

"1-1":

$$f(n_1) = f(n_2)$$

$$f(n_1) = (q_1, r_1) \Leftrightarrow n_1 = 3q_1 + r_1$$

$$f(n_2) = (q_2, r_2) \Leftrightarrow n_2 = 3q_2 + r_2$$

$$(q_1, r_1) = (q_2, r_2) \Rightarrow q_1 = q_2 \text{ i } r_1 = r_2$$

$$\Rightarrow 3q_1 + r_1 = 3q_2 + r_2$$

$$n_1 = n_2$$

$\Rightarrow f$ jeste "1-1"

"na":

$$(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$$

$$n = 3q + r \text{ se pri } f \text{ slika u } (q, r)$$

Lema: Ako je $g: A \rightarrow B$ bijekcija i $h: C \rightarrow D$ bijekcija $\Rightarrow g \times h: A \times C \rightarrow B \times D$ data sa
 $g \times h(a, c) = (g(a), h(c))$
 je isto bijekcija.

dokaz: "1-1": $g \times h(a_1, c_1) = g \times h(a_2, c_2)$
 $(g(a_1), h(c_1)) = (g(a_2), h(c_2))$
 $g(a_1) = g(a_2), h(c_1) = h(c_2)$

g i h su "1-1" $\Rightarrow a_1 = a_2$ i $c_1 = c_2$
 $\Rightarrow (a_1, c_1) = (a_2, c_2)$

$\Rightarrow g \times h$ "1-1".

"na": $(b, d) \in B \times D$
 g i h su "na"
 $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists a \in A \text{ tdj } g(a) = b \\ \exists c \in C \text{ tdj } h(c) = d \end{array} \right\} \Rightarrow g \times h(a, c) = (b, d)$
 $\Rightarrow g \times h$ je "na".

Indukcijom se dokazuje opšti je:

Ako $f_1: A_1 \rightarrow B_1, f_2: A_2 \rightarrow B_2, \dots, f_n: A_n \rightarrow B_n$,
 tada $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B_1 \times \dots \times B_n$
 data $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (f_1(a_1), f_2(a_2), \dots, f_n(a_n))$
 je isto bijekcija.

dokaz: pomoću prethodne leme.

2. Dokazati da je $|\mathbb{N} \setminus \{5\} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$

Treba konstruisati bijekciju:

$$\mathbb{N} \setminus \{5\} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Po prethodnom stavu, dovoljno je naći
 bijekciju $f: \mathbb{N} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{N}$ i $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

1, 2, 3, 4, 6, 7, --

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, --

$$f(n) = \begin{cases} n & n \in \{1, 2, 3, 4\} \\ n-1 & \text{inače} \end{cases}$$

ideja: nenegativne cele brojeve $(0, 1, 2, \dots)$ slikamo u neparne prirodne, a negativne cele u parne prirodne.

$$0 \mapsto 1$$

$$-1 \mapsto 2$$

$$1 \mapsto 3$$

$$-2 \mapsto 4$$

$$2 \mapsto 5$$

$$-3 \mapsto 6$$

$$3 \mapsto 7$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$g(n) = \begin{cases} 2n+1 & n \geq 0 \\ -2n & n < 0 \end{cases}$$

Stav: Za svaki skup A je $|A| < |\mathcal{P}(A)|$
 Specijalno, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

3. Dokazati da je $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})| = \aleph_0$, gde je
 $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ je konačan}\}$

Dokazaćemo $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

tako što ćemo dokazati:

$$|\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$$

$$\text{ i } |\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})|$$

jer nam tada antisimetričnost relacije $\leq$ daje jednakost.

Treba konstruisati "1-1" funkcije

$$f: \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{ i } g: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$$

$$g(n) = \{n\} \leftarrow \text{konačan podskup od } \mathbb{N}$$

g je očigledno "1-1"

$$f: \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$$

Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva, i
 pri tome važi jedinstvenost faktORIZACIJE u $\mathbb{N}$
 (svaki $n \in \mathbb{N}$ se na jedinstven način
 predstavlja kao proizvod stepena prostih
 $20 = 2^2 \cdot 5$)

$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ svi prosti brojevi

Ako je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{N}$

$f(A) = p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdot \dots \cdot p_{a_k}$
 f je „1-1“ zbog jedinstvenosti faktORIZACIJE.

Def: Za skup A kažemo da je najviše prebrojiv ako je konačan, ili prebrojiv.

Stav: Ako je B neki beskonačan skup, a A najviše prebrojiv, tada je $|B \cup A| = |B|$.

Stav: Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiva.

4. Dokazati da je skup svih polinoma sa celobrojnim koeficijentima prebrojiv i da je skup svih algebarskih brojeva (nule polinoma sa celobrojnim koeficijentima) prebrojiv

$$\mathbb{Z}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{p \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg p = n\} \cup \{0\}$$

[za 0 polinom nije definisan stepen]

$\mathbb{Z}[x]$ je prebrojiva unija skupova $\{p \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg p = n\}$

što je prebrojiv skup:

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$a_{n-1} \in \mathbb{Z}$$

$\vdots$

$$a_0 \in \mathbb{Z}$$

$$|\{p \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg p = n\}| = |\underbrace{\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{\text{Dekartov proizvod prebrojivih skupova}}| = \aleph_0$$

Dekartov proizvod
prebrojivih
skupova

Lema: Dekartov proizvod prebrojivih skupova A i B je prebrojiv.

dokaz: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$
 $B = \{b_1, b_2, \dots\}$

$A \times B$:

(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	...
(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	...
(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Elemente ovog skupa možemo poredati u niz $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \dots$

Indukcijom dokazujemo da isto to važi i za Dekartov proizvod n prebrojivih skupova $\{n \in \mathbb{N}\}$

Stoga, $\mathbb{Z}[X]$ je prebrojiva unija prebrojivih skupova, te je po prethodnom stavu $\mathbb{Z}[X]$ prebrojiv skup.

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[X]} \{x \in \mathbb{Q} \mid p(x) = 0\}$$

$\{x \in \mathbb{Q} \mid p(x) = 0\}$ je konačan skup jer je broj različitih nula u $\mathbb{Q}$ je $\leq \deg(p)$
 A je prebrojiva unija konačnih skupova

Lema: Prebrojiva unija konačnih skupova je najviše prebrojiva.

$$A_1 = \{a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{k_1}\}$$

$$A_2 = \{a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^{k_2}\}$$

$\vdots$

$$A_j = \{a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^{k_j}\}$$

$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ se može poredati u

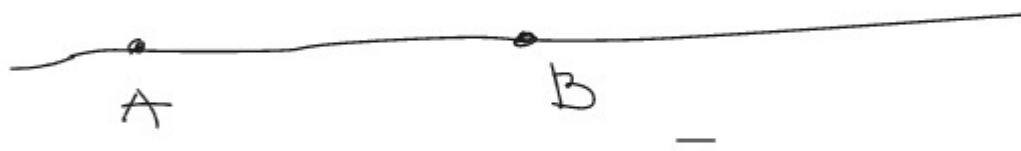
niz $\Rightarrow$ ne dobijemo ništa više od $\aleph_0$.

Stoga, A je najviše prebrojiv.
 Treba još dokazati da $\mathbb{A}$ nije konačan.
 Međutim, svaki ceo broj $a \in \mathbb{Z}$ je algebarski
 jer je nula polinoma $x - a \in \mathbb{Z}[x]$.

5. Neka je $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ takav da za svake
 dve tačke $A, B \in S$ važi da je dužina duži AB
 racionalan broj. Dokazati da je $|S| \leq \aleph_0$.

Neka su $A, B \in S$ neke dve različite tačke
 (ako ne postoje dve različite tačke iz S ,
 tada je $|S| \leq 1 \leq \aleph_0$)

+



Definišemo $f: S \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{-1, 0, 1\}$
 $f(C) = (d(A, C), d(B, C), \varepsilon_C)$

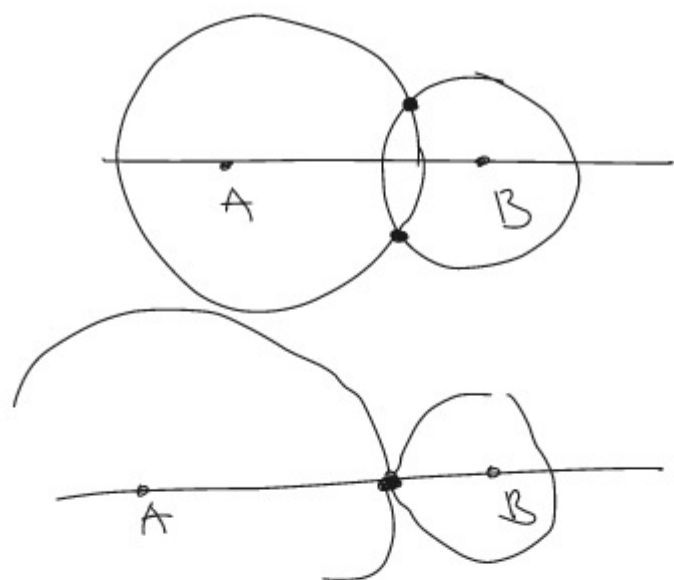
$$\varepsilon_C = \begin{cases} 1 & C \text{ u gornjoj} \\ -1 & C \text{ u donjoj} \\ 0 & C \text{ na pravoj } AB \end{cases}$$

Skup $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{-1, 0, 1\}$ je prebrojiv skup jer
 je $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Treba još dokazati da je f "1-1"
 $f(C) = f(D)$

$$(d(A, C), d(B, C), \varepsilon_C) = (d(A, D), d(B, D), \varepsilon_D)$$

$d(A, C) = d(A, D) \Rightarrow C$ i D su na istoj kružnici sa centrom u A
 $d(B, C) = d(B, D) \Rightarrow C$ i D su na istoj kružnici sa centrom u B
 $\varepsilon_C = \varepsilon_D$



Ove dve kružnice imaju najviše 2 zajedničke tačke, od kojih je jedna u gornjoj, a druga u donjoj poluravni. Ali, tačke C i D su u istoj poluravni jer je $\varepsilon_C = \varepsilon_D$.
 $\Rightarrow C = D$.

Po definiciji je Dakle, f je $1-1$.
 $|S| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{-1, 0, 1\}| = \aleph_0$.

6. Dokazati da postoji kontinuum mnogo podskupova $A_x \subseteq \mathbb{N}$ takvih da je za $x_1 \neq x_2$ $A_{x_1} \cap A_{x_2}$ konačan skup.

Svih podskupova od $\mathbb{N}$ ima $\aleph_c$ (jer je $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph_c$), pa ni ne možemo naći više od kontinuum mnogo podskupova od $\mathbb{N}$.

Neka je x neki realan broj $\in (\frac{1}{10}, 1)$

$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ pri čemu $x_i \neq 1$

Dodelimo mu

$A_x = \{x_1, \overline{x_1 x_2}, \overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}, \dots\}$

Interval $(\frac{1}{10}, 1)$ je neprebrojiv $\Rightarrow$ konstruisali smo neprebrojivo mnogo skupova A_x .

$x \neq y$ $A_x \cap A_y$ je konačan skup jer ako bi bio beskonačan, tada bismo od svakog prirodnog broja n imali veći prirodan broj k takav da je

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_k} = \overline{y_1 y_2 \dots y_k}$$

$$\Rightarrow x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2$$

$$\vdots$$

$$x_k = y_k$$

Ali k može biti beskonačno veliko $\Rightarrow x$ i y imaju isti decimalni zapis $\Rightarrow x = y$ $\nless$