

Funkcije

Def: Funkcija f iz skupa A u skup B ($f: A \rightarrow B$) je svaka relacija između elemenata skupa A i skupa B ($f \subseteq A \times B$) takva da $\forall a \in A \exists ! b \in B$ za koje je $(a, b) \in f$ (ovo pišemo $b = f(a)$)

Def: Za $f: A \rightarrow B$ kažemo da je „1-1“ (injektivna) ako $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
(ekvivalentno, $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$)

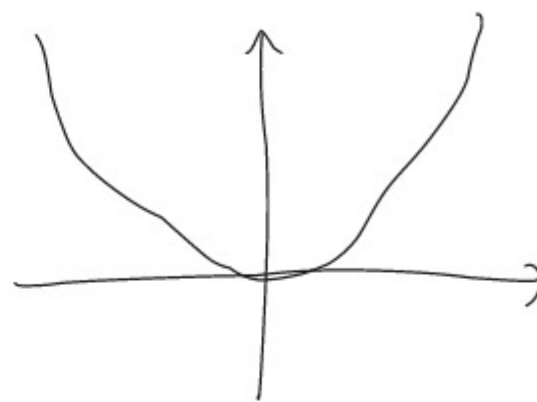
Def: Za $f: A \rightarrow B$ kažemo da je „na“ (surjektivna) ako $\forall b \in B \exists a \in A \quad f(a) = b$

Def: Za $f: A \rightarrow B$ kažemo da je bijekcija ako je „1-1“ i „na“.

Def: Za dve funkcije f i g kažemo da su jednake ($f = g$ ili $f \equiv g$) ako su im jednaki domeni, kodomeni i pravila dodele.

Primer: 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$

Nije „1-1“, ni „na“



2) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$
 $f(x) = x^2$

Nije „1-1“, jeste „na“

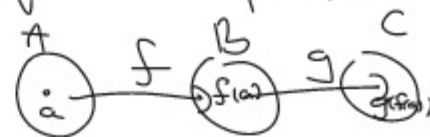
3) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$

Jeste „1-1“, nije „na“

4) $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$
 $f(x) = x^2$

bijekcija

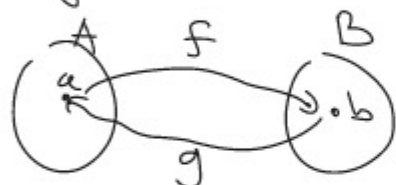
Def: $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, tada pod funkcijom $g \circ f: A \rightarrow C$ podrazumevamo funkciju sa pravilom $g \circ f(a) = g(f(a))$



Osobina: 1) $f \circ g \neq g \circ f$
2) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Def: Ako je A neki skup, tada pod identitetom na A podrazumevamo $Id_A: A \rightarrow A$ datu sa $Id_A(a) = a$.

Stav: $f: A \rightarrow B$ bijekcija $\Leftrightarrow \exists g: B \rightarrow A$ takva da je $g \circ f = Id_A$ i $f \circ g = Id_B$. Funkciju g nazivamo inverzom funkcije f i pišemo $g = f^{-1}$



Stav: a) $f: A \rightarrow B$ je " $1-1$ " $\Leftrightarrow \exists g: B \rightarrow A$ takva da je $g \circ f = Id_A$ (levi inverz)
b) $f: A \rightarrow B$ je "na" $\Leftrightarrow \exists g: B \rightarrow A$ takva da je $f \circ g = Id_B$ (desni inverz)

Stav: $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$

a) f i g " $1-1$ " $\Rightarrow g \circ f$ " $1-1$ "

b) f i g "na" $\Rightarrow g \circ f$ "na"

c) f i g bijekcije $\Rightarrow g \circ f$ bijekcija

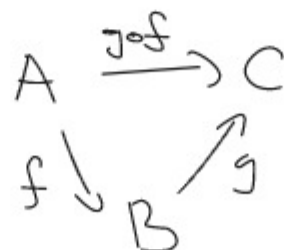
d) $g \circ f$ " $1-1$ " $\Rightarrow f$ " $1-1$ "

e) $g \circ f$ "na" $\Rightarrow g$ "na"

f) $g \circ f$ bijekcija $\Rightarrow f$ " $1-1$ " i g "na"

dokaz;

a) $f: A \rightarrow B$
 $g: B \rightarrow C$



Pretpostavimo da je

$$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \Leftrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

ali g je " $1-1$ ", pa je $f(a_1) = f(a_2)$

ali f je " $1-1$ ", pa je $a_1 = a_2$

e) $g \circ f: A \rightarrow C$ "na"

$c \in C$ proizvoljno

$\exists a \in A$ tako da je $c = g \circ f(a) = g(f(a))$

$f(a)$ je element skupa B
koji se funkcijom g slika u c

1. Dokazati da je $f: X \rightarrow Y$ "1-1" ako za bilo koji skup Z i bilo koje dve funkcije $g_1, g_2: Z \rightarrow X$ iz uslova $f \circ g_1 = f \circ g_2$ sledi uslov $g_1 = g_2$.

$\Rightarrow$: f "1-1"

I način:

Neka je $f \circ g_1 = f \circ g_2$
 f ima levi inverz $h: Y \rightarrow X$ takva da
 $h \circ f = Id_X$

$$h \circ (f \circ g_1) = h \circ (f \circ g_2)$$

$$(h \circ f) \circ g_1 = (h \circ f) \circ g_2$$

$$Id_X \circ g_1 = Id_X \circ g_2$$

$$g_1 = g_2$$

II način: Neka su $g_1, g_2: Z \rightarrow X$ takve da

$$f \circ g_1 = f \circ g_2$$

Ako je $z \in Z$ proizvoljno, mi znamo:

$$f \circ g_1(z) = f \circ g_2(z)$$

$$f(g_1(z)) = f(g_2(z))$$

f je "1-1", pa je $g_1(z) = g_2(z)$
 $\Rightarrow g_1 = g_2$

$\Leftarrow$: Pps da f nije "1-1". To znači da postoje
 $x_1 \neq x_2$ takvi da $f(x_1) = f(x_2)$.

$$Z = \{x\}$$

$$g_1(x) = x_1$$

$$g_2(x) = x_2$$

$$g_1 \neq g_2$$

$$f(g_1(x)) = f(x_1)$$

$$f(g_2(x)) = f(x_2)$$

$$f \circ g_1 = f \circ g_2$$

Dakle, f jeste "1-1".

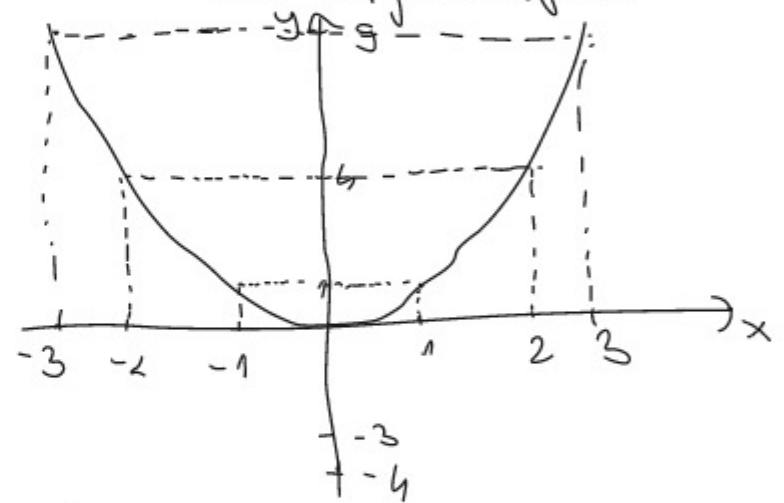
Direktna i inverzna slika skupa

Def: Ako $f: X \rightarrow Y$ i $A \subseteq X$, tada pod direktnom slikom skupa A podrazumevamo
 $f[A] = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq Y$

Def: Ako $f: X \rightarrow Y$ i $B \subseteq Y$, tada pod inverznom slikom skupa B podrazumevamo
 $f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$

Napomena: Inverzna slika skupa je definisana za svaku funkciju, a ne samo za bijekcije.

Primer: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$



a) $f[-2, 1] = [0, 4]$

b) $f^{-1}[-3, 9] = f^{-1}[0, 9] = [-3, 3]$

c) $f[f^{-1}[-4, 4]] = f[f^{-1}[0, 4]] = f[-2, 2] = [0, 4]$

d) $f^{-1}[f[1, 2]] = f^{-1}[1, 4] = [-2, -1] \cup [1, 2]$

Stav: $f: X \rightarrow Y$

a) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ (= važi ako je f "1-1")

b) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$ (= važi ako je f "na")

c) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$

d) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$

e) $f[A_1] \setminus f[A_2] \subseteq f[A_1 \setminus A_2]$

f) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$

g) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$

h) $f^{-1}[B_1 \setminus B_2] = f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2]$

2. Dokazati da je $f: X \rightarrow Y$ "1-1" ako za sve $A, B \subseteq X$ važi $f[A \Delta B] = f[A] \Delta f[B]$

$$\Rightarrow: f: X \rightarrow Y \text{ "1-1"}$$

$$\Rightarrow: f[A] \Delta f[B] = (f[A] \setminus f[B]) \cup (f[B] \setminus f[A])$$

$$\stackrel{e}{=} f[A \setminus B] \cup f[B \setminus A] \stackrel{e'}{=} f[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] = f[A \Delta B]$$

$$\Leftarrow: y \in f[A \Delta B] \Rightarrow \exists x \in A \Delta B \text{ takav da je}$$

$$\begin{matrix} y = f(x) \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\exists x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ takav da je}$$

$$y = f(x)$$

$$x \in A \setminus B$$

$$y = f(x)$$

ili

$$x \in B \setminus A$$

$$y = f(x)$$

$$x \in A \text{ i } x \notin B$$

$$y = f(x)$$

$$y = f(x) \in f[A]$$

$$y \notin f[B] \text{ jer je}$$

f "1-1", pa je x jedini element koji se sa f slika u y , te ne može postojati neko drugo $z \in B$ tako da je $f(z) = y$

$$y \in f[A] \setminus f[B]$$

$$x \in B \text{ i } x \notin A$$

$$y = f(x)$$

$$y = f(x) \in f[B]$$

$$y \notin f[A]$$

Po analognom razmatranju

$$y \in f[B] \setminus f[A]$$

$$y \in f[A] \setminus f[B] \quad \vee \quad y \in f[B] \setminus f[A]$$

$$y \in (f[A] \setminus f[B]) \cup (f[B] \setminus f[A])$$

$$y \in f[A] \Delta f[B].$$

$\Leftarrow$ pps da $f: X \rightarrow Y$ nije "1-1", tj. da postoje $x_1 \neq x_2$ tako da $f(x_1) = f(x_2) = y$

$$A = \{x_1\}$$

$$B = \{x_2\}$$

$$f[A \Delta B] = f[\{x_1\} \Delta \{x_2\}] = f[\{x_1, x_2\}] = \{y\}$$

$$f[A] \Delta f[B] = f[\{x_1\}] \Delta f[\{x_2\}] = \{y\} \Delta \{y\} = \emptyset$$

Dakle, f jeste "1-1".

3. Neka je $f: X \rightarrow Y$. Dokazati da je f "1-1" ako
 $\forall A \subseteq X$ i $\forall B \subseteq Y$ važi
 $f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)] = A \setminus f^{-1}[B]$

$\Rightarrow$: f "1-1":
 $f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)] \stackrel{a)}{=} f^{-1}[f[A]] \setminus f^{-1}[f[A] \cap B] \stackrel{g)}{=} \\ f^{-1}[f[A]] \setminus (f^{-1}[f[A]] \cap f^{-1}[B]) \stackrel{a)}{=} A \setminus (A \cap f^{-1}[B]) \stackrel{(*)}{=} A \setminus f^{-1}[B]$

$\Gamma(*)$: $X \setminus (X \cap Y) = X \setminus Y$
 $x \in X \setminus (X \cap Y) \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin X \cap Y \Leftrightarrow \\ x \in X \wedge \neg (x \in X \wedge x \in Y) \Leftrightarrow \\ x \in X \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Leftrightarrow \\ (x \in X \wedge x \notin X) \vee (x \in X \wedge x \notin Y) \Leftrightarrow \\ \perp \vee (x \in X \setminus Y) \Leftrightarrow x \in X \setminus Y$

$\Leftarrow$: Pps, da f nije "1-1".
 Postoje $x_1 \neq x_2$ takvi da $f(x_1) = f(x_2) = y$

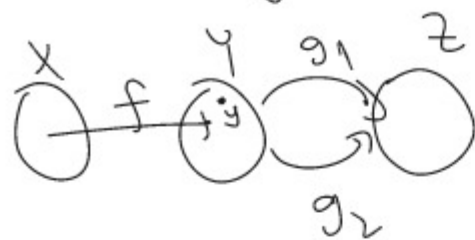
$A = \{x_1\}$ $L: f^{-1}[f[A] \setminus (f[A] \cap B)]$
 $B = \emptyset$ $= f^{-1}[\{y\} \setminus (\{y\} \cap \emptyset)] = \\ f^{-1}[\{y\} \setminus \emptyset] = f^{-1}[\{y\}] = \{x_1, x_2\}$

$D: A \setminus f^{-1}[B] = \{x_1\} \setminus \emptyset = \{x_1\}$
 L je bar dvočlan, a D je jednočlan $\Rightarrow D \neq L$

4. Dokazati da je $f: X \rightarrow Y$ "na" ako za svaki
 skup Z i funkcije $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ iz uslova da je
 $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ sledi $g_1 = g_2$.

$\Rightarrow$: $f: X \rightarrow Y$ "na" $\Rightarrow \exists h: Y \rightarrow X$ takva da je
 $f \circ h = Id_Y$
 $g_1 \circ f = g_2 \circ f$
 $(g_1 \circ f) \circ h = (g_2 \circ f) \circ h$
 $g_1 \circ (f \circ h) = g_2 \circ (f \circ h)$
 $g_1 \circ Id_Y = g_2 \circ Id_Y$
 $g_1 = g_2$

$\Leftarrow$: pps $f: X \rightarrow Y$ nije "na"
 $\exists y \in Y$ koje nije slika nijednog $x \in X$



$$Z = \{a, b, c\}$$

$$g_1(y) = a$$

$$g_2(y) = b$$

Sve ostale elemente iz Y
i sa g_1 i sa g_2 slikamo u c

$$g_1 \neq g_2$$

$$g_1(f(x)) = c$$

#

y jer
y nije slika
nijednog elementa

$$g_2(f(x)) = c$$

#

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f = \text{const}_c$$

y