

Л-јазуи

Све изразителне функције су Л-дефиниране.

Л-јазуи је највиши универзални програмски језик.

Л-изрази:

- атомички x је Л-израз
- ако су E и F Л-изрази, онда је (EF) такође Л-израз.
- ако је x атомички и E Л-израз, онда је $(\lambda x. E)$ такође Л-израз.
- Л-изрази се одијају коначном атомичком прелиминарном израза

Операције над Л-изразима:

- абурација
- апликација

Абурација Л-израза F по атомичком x је $(\lambda x. F)$.

Апликација Л-израза F на Л-израз E је (EF) .

Правилно бирање атомичких зраза:

$((\dots ((M_1 M_2) M_3) M_4) \dots M_n)$ еквивалент изразу $M_1 M_2 M_3 M_4 \dots M_n$

$\vdash_{[M_1 M_2] M_3}$ није исто што и $M_1 (M_2 M_3)$

$(\lambda x_1. (\lambda x_2. (\lambda x_3. (\dots (\lambda x_n. F) \dots))))$ еквивалент изразу $\lambda x_1 x_2 \dots x_n. F$

Примери (бирања атомичких зраза):

$$\underline{(x(yz))} \longrightarrow x(yz)$$

$$\underline{(xy)z} \longrightarrow xyz$$

$$\underline{(\lambda y. (\lambda x. (xy)))} \longrightarrow \lambda y. \underline{(\lambda x. (xy))} \longrightarrow \lambda y x. \underline{(xy)} \longrightarrow \lambda y x. xy$$

$$\underline{((\lambda x. ((xy)x))z)y} \longrightarrow \underline{(\lambda x. ((xy)x))} z y \longrightarrow (\lambda x. \underline{(xy)x}) z y \longrightarrow (\lambda x. xyx) z y$$

$$\underline{(\lambda x. (x(\lambda x. y)))} \longrightarrow \lambda x. \underline{(x(\lambda x. y))} \longrightarrow \lambda x. x(\lambda x. y)$$

$$\underline{((\lambda x. x)(\lambda x. y))} \longrightarrow (\lambda x. x)(\lambda x. y)$$

Трансформације над Л-изразима:

$F_\sigma(E)$ - скуп слободних атомичких у Л-изразу E

$$F_\sigma(x) = \{x\}$$

$$F_\sigma(\lambda x. E) = F_\sigma(E) \setminus \{x\}$$

$$F_\sigma(EF) = F_\sigma(E) \cup F_\sigma(F)$$

λ -конверзије

$\lambda x. F \xrightarrow{\lambda} \lambda y. F[x:=y]$ где зену се аргумента y не појављује у F

β -конверзије:

$(\lambda x. F) E \xrightarrow{\beta} F[x:=E]$ где зену све слободне аргументе из E треба да ошатају слободне и у λ -изразу $F[x:=E]$

Два λ -израза E и F су еквивалентна уколико се λ и β -конверзијама могу претворити један у други.

Датум је $E \equiv F$.

Примери:

$$(\lambda x. x(xy)) f \equiv (x(xy))[x:=f] = f(fy)$$

$$(\lambda x. y) f \equiv (y)[x:=f] = y$$

$$(\lambda x. (\lambda y. yx) f) g \equiv ((\lambda y. yx) f)[x:=g] = (\lambda y. yg) f \equiv (yg)[y:=f] = fg$$

$$\begin{aligned} (\lambda xy. xyx) f g &= ((\lambda xy. xyx) f) g \equiv ((\lambda y. xyx)[x:=f]) g \\ &\equiv (\lambda y. fyg) g \\ &\equiv (fgf)[y:=g] = fgf \end{aligned}$$

$$(\lambda xy. xy) y \equiv (\lambda xz. xz) y \equiv (\lambda z. xz)[x:=y] = \lambda z. yz$$

λ

$\lambda y. y y$

Редукс је λ -израз облика $(\lambda x. F) E$.

λ -израз је у нормалној форми уколико не садржи ниједан редукс који је редукс.

Терт-Росер: уколико λ -израз има нормалну форму, онда је она јединствена.

Примери коришћења на нормалну форму (када она постоји):

$$(\lambda x. xx)(\lambda x. xx) \equiv (xx)[x:=\lambda x. xx] = (\lambda x. xx)(\lambda x. xx) \equiv \dots \equiv (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$$

овај λ -израз нема нормалну форму

$$\begin{aligned} (\lambda x. xxy)(\lambda x. xxy) &\equiv (xxy)[x:=\lambda x. xxy] = ((\lambda x. xxy)(\lambda x. xxy))y \\ &\equiv ((xxy)[x:=\lambda x. xxy])y = (\lambda x. xxy)(\lambda x. xxy)yy \end{aligned}$$

овај израз нема нормалну форму

$$\begin{aligned} (\lambda x. xy)(\lambda u. \varnothing uu) &\equiv (xy)[x:=\lambda u. \varnothing uu] \equiv (\lambda u. \varnothing uu)y \equiv (\varnothing uu)[u:=y] \\ &\equiv \varnothing yy \end{aligned}$$

$\uparrow$
нормална форма

$$(\lambda u. \varnothing) (\underbrace{(\lambda x. xxy)(\lambda x. xxy)}}_{\equiv \varnothing}) \equiv (\varnothing)[u:=\underbrace{(\lambda x. xxy)(\lambda x. xxy)}_{\equiv \varnothing}] = \varnothing$$

$\uparrow$
нормална форма

$$(\lambda u. \varnothing) ((\lambda x. xxy)(\lambda x. xxy)y)$$

Нумерали (репрезентације природних бројева у λ-рачуњу)

$$\bar{0} \equiv \lambda f x. x$$

$$\bar{1} \equiv \lambda f x. f(x)$$

$$\bar{2} \equiv \lambda f x. f(f(x)) = \lambda f x. f^2(x)$$

⋮

$$\bar{n} \equiv \lambda f x. \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ пута}} = \lambda f x. f^n(x)$$

1. Inc = ?

$$\text{Inc } \bar{n} \equiv \overline{n+1}$$

$$\lambda f x. f^n(x) \longrightarrow \lambda f x. f^{n+1}(x)$$

$$\lambda f x. \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ пута}} \longrightarrow \lambda f x. \underbrace{f(f(f(\dots f(x)\dots)))}_{n+1 \text{ пута}}$$

$$\underbrace{(\lambda f x. f^n(x))}_\bar{n} f x \equiv f^n(x)$$

$$f(f^n(x)) \equiv f^{n+1}(x)$$

$$\underbrace{\lambda f x. f(\underbrace{\bar{n} f x}_{f^n(x)})}_{\bar{n+1}}$$

$$\boxed{\text{Inc} \equiv \lambda n f x. f(n f x)}$$

$$\text{Inc } \bar{2} = \underbrace{(\lambda n f x. f(n f x))}_\uparrow \bar{2}$$

$$\equiv \lambda f x. f(\bar{2} f x)$$

$$\equiv \lambda f x. f(\underbrace{(\lambda f x. f^2(x))}_\uparrow f x)$$

$$\equiv \lambda f x. f(f^2(x)) \equiv \lambda f x. f^3(x) = \bar{3}$$

2. S = ?

$$S \bar{n} \bar{m} \equiv \overline{m+n}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda f x. f^n(x) \\ \lambda f x. f^m(x) \end{array} \right\} \longrightarrow \lambda f x. f^{m+n}(x)$$

$$\bar{n} f x \equiv f^n(x)$$

$$(\lambda f x. f^m(x)) f (\underbrace{\bar{n} f x}_{f^n(x)}) \equiv f^m(f^n(x)) = f^{m+n}(x)$$

$$\bar{m} f (\bar{n} f x) \equiv f^{m+n}(x)$$

$$\boxed{S \equiv \lambda m n f x. m f (n f x)}$$

$$S \bar{1} \bar{2} \equiv \underbrace{(\lambda m n f x. m f (n f x))}_\uparrow \bar{1} \bar{2}$$

$$\equiv \lambda f x. \bar{1} f (\bar{2} f x)$$

$$\equiv \lambda f x. \bar{1} f (\underbrace{(\lambda f x. f^2(x))}_\uparrow f x)$$

$$\equiv \lambda f x. \bar{1} f (f^2(x))$$

$$\equiv \lambda f x. (\underbrace{(\lambda f x. f(x))}_\uparrow f (f^2(x)))$$

$$\equiv \lambda f x. f(f^2(x))$$

$$\equiv \lambda f x. f^3(x) = \bar{3}$$

Уредити пар објеката

$$(\overline{m, n}) = \lambda f g x. f^m(g^n(x))$$

5. Par = ?

$$\text{Par } \tilde{m} \tilde{n} \equiv \overline{m, n}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda f x. f^m(x) \\ \lambda f x. f^n(x) \end{array} \right\} \rightarrow \lambda f g x. f^m(g^n(x))$$

$$g^n(x) \equiv \tilde{n} g x = \left(\lambda f x. f^n(x) \right) g x$$

$$\tilde{m} f \underbrace{(\tilde{n} g x)}_{g^n(x)} \equiv \left(\lambda f x. f^m(x) \right) f g^n(x) = f^m(g^n(x))$$

$$\text{Par} = \lambda m n f g x. m f (\tilde{n} g x)$$

6. Prva = ?

$$\text{Prva } (\overline{m, n}) = \tilde{m}$$

$$\lambda f g x. f^m(g^n(x)) \rightsquigarrow \lambda f x. f^m(x)$$

$$\begin{aligned} (\lambda f g x. f^m(g^n(x))) f (\lambda x. x) x &= f^m \left(\underbrace{(\lambda x. x)^n(x)}_x \right) \\ &= f^m(x) \end{aligned}$$

$$\text{Prva} = \lambda P f x. P f (\lambda x. x) x$$

7. Druga = ?

$$\text{Druga } (\overline{m, n}) = \tilde{n}$$

$$(\lambda f g x. f^m(g^n(x))) (\lambda x. x) f x = (\lambda x. x)^n(f(x)) = f^n(x)$$

$$\text{Druga} = \lambda P f x. P (\lambda x. x) f x$$

8. Pred = ?

$$\text{Pred } \bar{n} = \begin{cases} \bar{n-1}, & n \neq 0 \\ \bar{0}, & n = 0 \end{cases}$$

$$(\bar{0}, \bar{0}) \xrightarrow{G} (\bar{1}, \bar{0}) \xrightarrow{G} (\bar{2}, \bar{1}) \xrightarrow{G} (\bar{3}, \bar{2}) \rightarrow \dots \xrightarrow{G} (\bar{n}, \bar{n-1})$$

$$\underbrace{G(G(G \dots (G(\bar{0}, \bar{0})) \dots))}_{n \text{ applications}} = G^n(\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{n}, \bar{n-1})$$

$$P = (\bar{m}, \bar{n})$$

$$P_{\text{AR}} \left(\underbrace{\text{Inc} (P_{\text{RA}} P)}_{\bar{m+1}} \right) \left(\underbrace{P_{\text{RA}} P}_m \right) \equiv (\bar{m+1}, \bar{m})$$

$$G(\bar{m}, \bar{n}) = (\bar{m+1}, \bar{m})$$

$$G = \lambda P. P_{\text{AR}} (\text{Inc} (P_{\text{RA}} P)) (P_{\text{RA}} P)$$

$$(\lambda x. x^n(x)) G (\bar{0}, \bar{0}) \equiv G^n(\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{n}, \bar{n-1})$$

$$\text{Pred} = \lambda n. \text{Drug} (n G (\bar{0}, \bar{0}))$$

$$l = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\lambda x. \lambda a_1 (\lambda a_2 (\dots (\lambda a_{n-1} (\lambda a_n x)) \dots))$$

$\lambda x. x$ - āpazha mawā

9. Glava ?

$$G_{\text{lava}} l \equiv a_1$$

$$\lambda x. \lambda a_1 \left(\lambda a_2 \dots \left(\lambda a_{n-1} (\lambda a_n x) \right) \dots \right)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\lambda xy. x$ $\lambda xy. x$ $\lambda xy. x$ $\lambda xy. x$

$$\left(\lambda x. \lambda a_1 (\lambda a_2 \dots (\lambda a_{n-1} (\lambda a_n x)) \dots) \right) (\lambda xy. x) x \equiv a_1$$

$$G_{\text{lava}} = \lambda l. l (\lambda xy. x) x$$

10. Prazna = ?

$$\text{Prazna } l = \begin{cases} \text{true} & , \quad l \text{ je prazna} \\ \text{false} & , \quad l \text{ nije prazna} \end{cases}$$

$$\left(\lambda x. \lambda a_1 (\lambda a_2 (\dots (\lambda a_{n-1} (\lambda a_n x)) \dots)) \right)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\lambda x. \text{false}$ $\lambda x. \text{false}$ $\lambda x. \text{false}$

$$(\lambda x. x) \quad \xrightarrow{*} \quad \text{true} = \text{true}$$

$$\text{Prazna} = \lambda l. l (\lambda x. \text{false}) \text{true}$$

$$(a, b) = \lambda f. f a b$$

$$(\lambda f. f a b) (\lambda x y. x) = (\lambda x y. x) a b = a$$

$$(\lambda f. f a b) (\lambda x y. y) = (\lambda x y. y) a b = b$$

$$\begin{aligned} \text{Prva} &= \lambda P. P (\lambda x y. x) \\ \text{Druga} &= \lambda P. P (\lambda x y. y) \\ \text{Upari} &= \lambda a b f. f a b \end{aligned}$$

11. Rep = ?

$$\text{Rep } [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_2, \dots, a_n]$$

$$a_n \text{ (nil, nil)} \xrightarrow{G} ([a_n], \text{nil})$$

$$a_{n-1} ([a_n], \text{nil}) \xrightarrow{G} ([a_{n-1}, a_n], [a_n])$$

$$a \text{ (} l_1, l_2 \text{)} \xrightarrow{G} ([a, l_1], l_1)$$

$$\text{Dodaj Glavu } a \text{ } l = [a, l]$$

$$\text{Dodaj Glavu} = \lambda a l f x. f a (l f x)$$

$$G = \lambda a P. \text{Upari } (\text{Dodaj Glavu } a \text{ (Prva } P)) \text{ (Prva } P)$$

$$\left(\lambda x x. \lambda a_1 (\lambda a_2 (\lambda a_3 x)) \right) G \text{ (nil, nil)} \equiv G a_1 (G a_2 (G a_3 (\text{nil, nil})))$$

$\underbrace{([a_3], \text{nil})}_{([a_2, a_3], [a_3])}$
 $\underbrace{([a_1, a_2, a_3], [a_2, a_3])}$

$$\text{Rep} = \lambda l. \text{Druga } (l \text{ } G \text{ (nil, nil)})$$