

Izračunljive funkcije

Teorema: Funkcija $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ je parcijalno rekurzivna akko je Turing-izračunljiva akko je URM-izračunljiva.

Čerč-Turingova teza: Funkcija f je izračunljiva akko je intuitivno izračunljiva.

Jasno, svih izračunljivih funkcija $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ima prebrojivo mnogo (Turingovih programa ima prebrojivo mnogo). Kako svih $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ima neprebrojivo mnogo ($\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ a $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph > |\mathbb{N}|$), te postoji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totalna koja je neizračunljiva.

Takođe, imamo Godelovo kodiranje Turingovih programa koje sve izračunljive funkcije veća u niz $e_1, e_2, e_3, \dots$ takav da je $(e, x) \mapsto \varphi_e(x)$ izračunljiva po e i x . Stoga, postoji Turingova mašina koju zovemo univerzalnom Turingovom mašinom koja za ulaz (e, x) vraća $\varphi_e(x)$ (simulira rad svih Turingovih programa).

1. Dokazati da je svaka URM-izračunljiva funkcija dominirana nekom strogo rastućom URM-izračunljivom funkcijom.

Neka je f proizvoljno URM-izračunljiva $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Tada je f i parcijalno rekurzivna.

$$g(0) = f(0) + 1$$

$$g(n+1) = \max \{ g(n), f(n+1) \} + 1$$

$$= \frac{|g(n) - f(n+1)| + g(n) + f(n+1)}{2} + 1$$

$\Rightarrow g$ je isto

rekurzivna

$\Rightarrow g$ je i URM-izračunljiva

Ozighledno, g strogo raste i dominira f .

2. Dokazati da ne postoji niz $\{f_e\}_{e \geq 0}$ svih totalnih izračunljivih funkcija za koje je $(e, x) \mapsto f_e(x)$ izračunljivo po e i x .

Pps da to jeste moguće.

Želimo da dobijemo kontradikciju tako što ćemo konstruisati novu totalnu izračunljivu funkciju koja se ne nalazi u ovom nizu.

Posmatrajmo funkciju $h: x \mapsto f_x(x) + 1$

Kako je $(e, x) \mapsto f_e(x)$ izračunljivo, to je i $x \mapsto f_x(x)$ izračunljivo, pa je i funkcija h izračunljiva. Takođe, funkcija h je totalna.

Pritom, $h \neq f_e$ za svako $e \in \mathbb{N}$ jer

$$h(e) \neq f_e(e)$$

$$f_e(e) + 1 \neq f_e(e)$$



$$\underline{f_0(0)} \quad f_0(1) \quad f_0(2) \quad \dots$$

$$f_1(0) \quad \underline{f_1(1)} \quad f_1(2) \quad \dots$$

$$f_2(0) \quad f_2(1) \quad \underline{f_2(2)} \quad \dots$$

$\vdots$

3. Dokazati da postoji totalna unarna funkcija koja nije izračunljiva.

Pps da su sve totalne unarne funkcije izračunljive. Možemo ih poredati u niz.

$f_0, f_1, f_2, \dots$

Konstruišimo funkciju $h(x) = f_x(x) + 1$.

h je totalna i razlikuje se od svih funkcija f_e



4. Dokazati da totalnih unarnih strogo rastućih funkcija ima neprebrojivo mnogo.

$$(x \mapsto x+k$$

$\forall k \in \mathbb{N} \text{ daje})$

Pps, da ih ima najviše prebrojivo mnogo $\Rightarrow$
možemo ih poredati u niz $f_0, f_1, f_2, \dots$

Definišimo funkciju g tako da bude totalna,
strogo rastuća; da se razlikuje od svih f_e .

$$g(x) = f_x(x) + 1 \quad (\text{ne znamo koliko je } g(x+1) - g(x))$$

Definišimo g induktivno:

$$g(0) = f_0(0) + 1$$

Ako su $g(0), \dots, g(n)$ definisani, definišimo
 $g(n+1) = f_{n+1}(n+1) + g(n) + 1$

Stoga, $g(n+1) > g(n)$ $g(n+1) \neq f_{n+1}(n+1)$
Stoga, g je tražena funkcija koja daje
kontradikciju.

Izračunljivi skupovi

Def: $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je izračunljiv ako je χ_A izračunljiva.

Def: $A \subseteq \mathbb{N}$ je izračunljivo nabrojiv ako je $A = \emptyset$,
ili postoji izračunljiva procedura koja nabroja
elemente skupa A (tj. izračunljiva funkcija
takva da je $A = \text{Im}(f) = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$)

⌈ Napomena: Kako postoje izračunljiva kodiranja
 $h: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, to možemo reći da je $A \subseteq \mathbb{N}^k$
izračunljivo nabrojiv ako je $h(A)$ izračunljivo
nabrojiv $\subseteq \mathbb{N}$

Teorema: $A \subseteq \mathbb{N}$ je izračunljiv ako su A i $\bar{A}$
izračunljivo nabrojivi.

Primer: 1) $\mathcal{H} = \{ (e, x) \mid \varphi_e(x) \downarrow \} \subseteq \mathbb{N}^2$
nije izračunljiv

2) $\mathcal{K} = \{ x \mid \varphi_x(x) \downarrow \} \subseteq \mathbb{N}$
nije izračunljiv, ali jeste izračunljivo nabrojiv
($\bar{\mathcal{K}}$ nije izračunljivo nabrojiv)

1. Dokazati da je unija nabrojivih skupova nabrojiv skup.

A, B nabrojivi $\Rightarrow A \cup B$ nabrojiv?

1° Ako je $A = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$ ✓

2° Ako je $B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A$ ✓

3° $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B$ su slike totalnih izračunljivih funkcija
 $A = \text{Im}(f)$ $B = \text{Im}(g)$

$f(0), g(0), f(1), g(1), f(2), g(2), \dots$

$$h(x) = \begin{cases} f(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) & x \text{ parno} \\ g(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) & x \text{ neparno} \end{cases}$$

$$h(x) = f(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) \cdot \chi_{2\mathbb{N}}(x) + g(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) \cdot \chi_{2\mathbb{N}+1}(x)$$

$\Rightarrow h$ je rekurzivna totalna funkcija i h nabroja elemente unije.

2. Dokazati da je presek nabrojivih skupova nabrojiv.

A, B nabrojivi $\stackrel{?}{\Rightarrow} A \cap B$ nabrojiv

1° $A = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ ✓

2° $B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ ✓

3° $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset \Rightarrow A = \text{Im}(f)$ i $B = \text{Im}(g)$
 gde su f i g totalne izračunljive funkcije.

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \text{ i } x \in B \Leftrightarrow \\ &x \in \text{Im}(f) \text{ i } x \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow \\ &\exists s_1 \in \mathbb{N} \text{ takj } x = f(s_1) \text{ i } \\ &\exists s_2 \in \mathbb{N} \text{ takj } x = g(s_2) \end{aligned}$$

Uzmimo $\mathbb{N} \xrightarrow{(k_1, k_2)} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ inverzna funkcija kodiranja $(\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$

$$s \mapsto (k_1(s), k_2(s)) \mapsto (f(k_1(s)), g(k_2(s)))$$

i proveravamo da li je $f(k_1(s)) = g(k_2(s))$

i ukoliko jeste, enumerišemo tu vrednost.

Po Čerč-Tjuringovoj tezi, ovo je izračunljivo. miro

3. Neka je $X = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ konačan skup prirodnih brojeva. Pronađi Turingovu mašinu čiji je halting skup baš X .

Konstruiramo Turingov program kao uniju k disjunktih potprograma $P_1, P_2, \dots, P_k$, pri čemu:
Program P_i upoređuje dati ulaz n sa n_i i u slučaju da jesu jednaki, završava izvršavanje, a u slučaju da nisu jednaki skače na početnu instrukciju potprograma $P_{i+1 \pmod k}$.

Domaći: Napisati program sa halting skupom $\{2, 3\}$

Teorema: Skup $A \subseteq \mathbb{N}$ koji je beskonačan je izračunljiv ako je A slika neke strogo rastuće totalne funkcije koja je izračunljiva.

4. Dokazati da svaki beskonačan izračunljivo nabrojiv skup A sadrži beskonačan izračunljiv podskup.

$$A = \text{Im}(f)$$

Znamo da je beskonačan skup izračunljiv ako je slika neke strogo rastuće izračunljive funkcije g .

$$g(0) = f(0)$$

Ukoliko su prethodno izabrane vrednosti $g(0), g(1), \dots, g(n)$, za vrednost $g(n+1)$ biramo $f(k)$, pri čemu je k najmanji $\in \mathbb{N}$ takav da je $f(k) > g(n)$. Ovakvo k postoji jer A je beskonačan i $A = \text{Im}(f)$.

$$g(0) = f(0)$$

$$g(n+1) = f(k_k) (f(k) > g(n))$$

$\Rightarrow g$ je
izračunljiva
i strogo
rastuća

$\Rightarrow g$ enumeriše neki ∞ izračunljiv podskup od A .