

URM

(mašine sa neograničenim brojem registara)

Hardver URM čine registri $R_1, R_2, \dots$
u kojima se mogu nalaziti prirodni brojevi

$r_1, r_2, \dots$

URM program je konačan niz instrukcija koje mogu biti sledećeg oblika:

- | | | |
|--------------|--------------|--|
| 1) nula | $Z(n)$ | $r_n := 0$ |
| 2) sledbenik | $S(n)$ | $r_n := r_{n+1}$ |
| 3) transfer | $T(u, n)$ | $r_n := r_u$ |
| 4) skok | $J(u, n, z)$ | Ako je $r_u = r_n$, skoži
na instrukciju sa rednim
brojem z . |

Ulazna konvencija: Ako URM programu treba proslediti k -torku $(n_1, \dots, n_k)$ kao argument, tada ni smeštamo u registar R_i ($1 \leq i \leq k$), dok je u ostalim registrima 0.

Izlazna konvencija: Rezultat smeštamo u registar R_1 .

Def: Za $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ kažemo da je URM-izračunljiva ako postoji URM program koji računa f .

Primer: a) $\perp. J(1, 1, 1)$ - ovaj program nikada ne prestaje sa izvršavanjem

$\perp. J(u, u, z)$ - instrukcija bezuslovnog skoka

b) $n \mapsto 0$ $\perp. Z(1)$

c) $n \mapsto n+1$ $\perp. S(1)$

d) $(n_1, \dots, n_k) \mapsto n_i$ $\perp. T(i, 1)$
($1 \leq i \leq k$)

} osnovne
aritmetičke
funkcije

1. Dokazati da su funkcije

$$a) w \mapsto \begin{cases} 0 & w=0 \\ 1 & w \neq 0 \end{cases}$$

$$b) (w, n) \mapsto \begin{cases} 0 & w=n \\ 1 & w \neq n \end{cases}$$

URM - izračunljive.

a)

w	0	0	0	0
---	---	---	---	---

Ideja: Uporedi w sa r_2 i ako su jednaki, anuliraj R_1 , a inače u R_1 upiši 1

1. $J(1, 2, 5)$

2. $Z(1)$

3. $S(1)$

4. $J(1, 1, 6)$

5. $Z(1)$

(URM program prestaje sa izvršavanjem ukoliko ne postoji instrukcija koju možemo primeniti)

b)

w	n	0	0
---	---	---	---

1. $J(1, 2, 5)$

2. $Z(1)$

3. $S(1)$

4. $J(1, 1, 6)$

5. $Z(1)$

2. Dokazati da je funkcija $(w, n) \mapsto w+n$ URM - izračunljiva.

w	n	0	0	0
---	---	---	---	---

 - - -

Ideja: Vrednost u R_1 uvećavamo za 1 n puta pomoću brojača kog čuvamo u R_3

1. $J(2, 3, 5)$

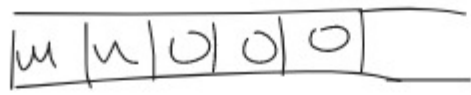
2. $S(1)$

3. $S(3)$

4. $J(1, 1, 1)$

3. Dokazati da je funkcija $(m, n) \mapsto m \cdot n$ URM - izračunljiva.

Ideja:



Ideja rešenja je da u R_3 i R_4 čuvamo brojeve od kojih će prvi ići do m , a drugi do n , te da uz pomoć njih i dve ugnježdene petlje rezultat upisujemo u R_5 .

1. $J(2, 4, 9)$
 2. $J(1, 3, 6)$
 3. $S(5)$
 4. $S(3)$
 5. $J(1, 1, 2)$
 6. $Z(3)$
 7. $S(4)$
 8. $J(1, 1, 1)$
 9. $T(5, 1)$
- uvećava R_5 za m
- Ovo se ponavlja n puta

Lema: Kompozicija $f \circ g$ dve URM - izračunljive funkcije je URM - izračunljiva.

dokaz:

Neka su P_f i P_g URM programi koji računaju f i g .

Program P_g modifikujemo tako da svakoj instrukciji skoka $J(m, n, g)$ u g važi $g \leq l(P_g) + 1$, gde je $l(P_g)$ broj instrukcija P_g .

Da bi argument $g(n)$ bio adekvatno prosleđen programu P_f , neophodno je anulirati sve registre (osim R_1) koje je P_g koristio.

U programu P_f moramo promeniti instrukcije (ako smo u prethodnom iskoristili s instrukcija, u P_f instrukcija $k \mapsto k + s$)

Nadovezivanjem ovoga dobijamo program koji računa $f \circ g$.

4. Dokazati da je funkcija $(m, n) \mapsto \max\{m, n\}$ URM-izračunljiva



Ideja: U R_3 i R_4 čuvam kopije od m i n respektivno.

R_3 i R_4 postupno uvećavamo za 1 i upoređujemo R_3 sa R_2 , odnosno R_4 sa R_1 .
Ukoliko dođe do prvog poklapanja $\max\{m, n\} = n$,
a ukoliko dođe do drugog poklapanja, $\max\{m, n\} = m$.

1. J(1, 2, 10)
2. T(1, 3)
3. T(2, 4)
4. S(3)
5. S(4)
6. J(2, 3, 9)
7. J(1, 4, 10)
8. J(1, 1, 4)
9. T(2, 1)

Domaći: $(m, n) \mapsto |m - n|$ (u R_5 čuvati brojač koji detektuje koliko puta su instrukcije S(3) i S(4) neophodne)

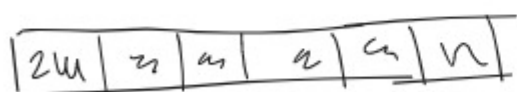
5. Dokazati da je funkcija $(m, n) \mapsto 2m + 5n$ URM-izračunljiva.

Iskoristićemo URM programe koje smo napisali u zadacima 2 i 3.



Ideja: n šaljem u siguran registar (R_6)

da ga funkcija $m \mapsto 2m$ ne bi promenila



Nakon toga, anuliramo registre R_2, R_3, R_4, R_5

$2m$ pošaljemo u R_7 ,

n vratimo u R_1 i računamo

$$n \mapsto 5n$$

$s_n | z | z | z | z | n | 2n | 0 | 0$

Prebacujemo $2n$ (što
je u R_7) u R_2
anuliramo R_3, R_4, R_5, R_6, R_7

$s_n | 2n | 0 | 0 | 0 | - -$

Nakon toga, računamo $(s_n, 2n) \mapsto s_n + 2n$

Funkcija zauzetog labra

Def: $B(n)$ = najveći mogući izlaz ULM programa koji ima najviše n instrukcija za ulaz 0.

Primer: $B(1) = 1$
 $B(2) = 2$

1. $S(1)$

1. $S(1)$

2. $S(1)$

$\vdots$

$B(10) \geq 39$

Def: $P[n]$ je program sa n instrukcija koji za ulaz 0 izbacuje izlaz veći od izlaza svih drugih programa sa n instrukcija za ulaz 0.

$$B(n) = P[n](0)$$

Lema: $B(n+1) > B(n)$

dokaz: $P[n]$
 $S(1)$

Lema: $\forall n \geq 1$ je $B(n+5) \geq 2n$

1. $S(1)$

2. $S(1)$

$\vdots$

$n. S(1)$

$n+1. J(1, 2)$

$n+2. J(2, 3, n+6)$

$n+3. S(1)$

$n+4. S(3)$

$n+5. J(1, 1, n+2)$

$\Rightarrow$ ovo je program koji ima $n+5$ instrukcija i za ulaz 0 vraća vrednost $2n$.

$0 | 0 | - -$

$\downarrow$

$n | 0 | 0 | - -$

$n | n | 0 | 0 | - -$

Lema: Svaka URM - izračunljiva funkcija je dominirana strogo rastućom URM - izračunljivom funkcijom

(Kažemo da f dominira g ukoliko je $f(n) > g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} / \text{počev od nekog } n \in \mathbb{N}$)

Teorema: B nije URM - izračunljiva

dokaz: Dokazujemo da B dominira svaku URM izračunljivu funkciju.

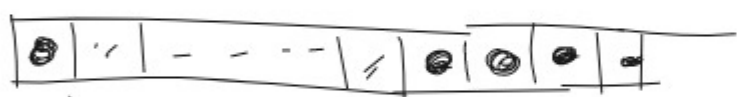
Ako je f URM - izračunljiva, postoji strogo rastuća URM - izračunljiva g koja dominira f .

Dokazujemo da B dominira g .

Neka je P_g program koji računa g i neka P_g ima k_0 instrukcija

$$B(n+k_0) \geq g(B(n)) \quad \forall n \geq 1$$

$$g(P[n](0))$$



možda je $P[n]$ koristio ove registre,

Modifikujemo P_g tako da ne koristi registre koje je $P[n]$ koristio (osim R_1)

$$B(n+k_0+6) > B(n+k_0+5) \geq g(B(n+5)) \geq$$

$$g(2n) > g(n+k_0+6)$$

$$\Rightarrow B \text{ dominira } g \text{ počev od } k_0+7$$

za $n > k_0+6$ jer je g strogo rastuća

$\rightarrow B$ nije URM - izračunljiva.