

Lema: Kompozicija f i g Turing-izračunljive funkcije je Turing-izračunljiva.

dokaz: Neka su P_f i P_g Turingovi programi koji računaju f i g . Od programa P_g dobijamo pomoću prethodne leme program P_{g^*} koji za ulaz n izbacuje izlaz $g(n)+1$ u obliku uzastopnih jedinica, pri čemu je glava smeštena na najlevljoj jedinici. Za sva stanja u kojima P_{g^*} prestaje sa radom (tj. za četvorke $z_i S \dots$ koje se ne pojavljuju u P_{g^*}) dopisujemo $z_i S S z_M$, pri čemu je M veći od indeksa svih stanja u P_{g^*} . Želimo da z_M bude polazno stanje za P_f . U programu P_f je neophodno prenumerisati sva stanja z_i u z_{M+i} . Nadovezivanjem ovoga dobijamo program koji računa kompoziciju.

1. Dokazati da je funkcija $f(x,y) = \text{ostatak pri deljenju } y+1 \text{ sa } x+1$ Turing-izračunljiva.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \varepsilon & \varepsilon & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+1 | y+1 \\ \hline 214 \end{array} \quad \begin{array}{l} a = b \cdot 2 + r \\ r < b \end{array}$$

Ideja rešenja: Od drugog niza (sa njegovog kraja) skidamo po $x+1$ jedinica sve dok možemo (tj. dok je dužina drugog niza $\geq x+1$). Kada više ne možemo, znamo da smo dobili ostatak pri deljenju.

$$\left. \begin{array}{l} z_0 1 \varepsilon z_0 \\ z_0 \varepsilon R z_1 \end{array} \right\} \text{ pretvaramo prvu jedinicu u } \varepsilon$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 1 R z_1 \\ z_1 0 R z_2 \end{array} \right\} \text{ idemo na početak drugog niza}$$

$z_2 0 L z_{14}$

- ako od drugog niza nije ništa ostalo, to znači da $x+1 | y+1$, pa nam treba prazna traka

$22^1 R 23$
 $22^M M 218$

— ako smo sve jedinice drugog niza zamenili sa M , broj tih M je bas ostatak

$23^1 R 23$
 $23^0 L 24$
 $23^M L 24$

} idemo do poslednje jedinice drugog niza

$24^1 M 25$ — poslednju jedinicu pretvaramo u M

$25^M L 25$
 $25^1 L 25$
 $25^0 L 26$

} idemo na kraj prvog niza

$\varepsilon \dots \varepsilon 0$

$\square$
 $M \dots M$

$26^E R 27$ — ako smo sve jedinice prvog niza označili sa E , to znači da je $x+1$ jedinica drugog niza označeno sa M , pa možemo da ih brišemo

$26^1 L 28$ — ako nije to slučaj, treba opet otpočeti proceduru

$28^1 L 28$
 $28^E R 20$

} idemo do prve jedinice i opet krećemo sa ovom iteracijom

$27^0 R 29$

$\square \square \square$
 $0E \dots \varepsilon 0 1 1 \dots 1 M \dots M 0$
 $\square$

$29^1 R 29$
 $29^M 0 210$
 $29^0 L 211$

$210^0 R 29$

} Brišemo sve M

$211^0 L 211$
 $211^1 L 211$
 $211^E E 212$

} idemo na kraj prvog niza

$212^E 1 213$
 $212^0 R 20$

$213^1 L 212$

} Preoznačavamo E u 1 i pripremamo se za ponovnu iteraciju.

$214^0 L 215$

$215^1 0 216$
 $215^E 0 216$
 $215^0 0 217$

$216^0 L 215$

} pravimo praznu traku

$q_{18} \uparrow 1 q_{18}$
 $q_{18} \downarrow R q_{18}$
 $q_{18} \circ L q_{19}$

Preobračavamo $\uparrow$ u $\downarrow$

$q_{19} \downarrow L q_{19}$
 $q_{19} \circ L q_{20}$

idemo na kraj prvog niza

$q_{20} \downarrow \circ q_{21}$
 $q_{20} \varepsilon \circ q_{21}$

$q_{21} \circ L q_{20}$

Brišemo prvi niz

e. $\Sigma = \{a, b\}$ je ulazni alfabet za Turingovu mašinu T . Dokazati da je funkcija

$$f(w) = \begin{cases} 1 & |w|_a = |w|_b \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Turing-izračunljiva

Ideja rešenja: Sleva nadesno upanjemo simbole (a, b) i (b, a) tako što ih transformišemo u ε . Ako su svi simboli početne reči pretvoreni u ε , to znači da je $|w|_a = |w|_b$, a ako u ovoj potrazi za odgovarajućim simbolom nađemo na kraj reči, znamo da je $|w|_a \neq |w|_b$.

$q_0 a \varepsilon q_1$
 $q_0 b \varepsilon q_2$

$q_1 \varepsilon R q_1$
 $q_1 a R q_1$
 $q_1 \circ L q_2$

simbol nije pronađen

$q_2 \varepsilon R q_2$
 $q_2 b R q_2$
 $q_2 \circ L q_3$

potraga za odgovarajućim simbolom

$q_1 b \varepsilon q_3$ ← simbol je pronađen → $q_2 a \varepsilon q_3$

$q_3 \varepsilon L q_3$
 $q_3 a L q_3$
 $q_3 b L q_3$
 $q_3 \circ R q_4$

idemo na početak reči

$q_4 \varepsilon R q_4$ } traženje prvog
 $q_4 a a q_0$ } ne- ε simbola
 $q_4 b b q_0$
 $q_4 0 L q_5$ - ako takav simbol ne
 postoji $\Rightarrow |w|_a = |w|_b$

$q_5 \varepsilon 0 q_4$ } Brišemo sve ε
 $q_5 0 1 q_5$ } vraćamo vrednost 1
 kao odgovor

$q_6 a 0 q_7$
 $q_6 b 0 q_7$
 $q_6 \varepsilon 0 q_7$ } Brišemo sve
 $q_7 0 L q_6$ } simbole i
 ostavljamo
 praznu traku

3. Dokazati da je $x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ Turing-izračunljiva
 (skidamo svaku drugu jedinicu)

4. $\Sigma = \{a, b\}$ $f(w) = \begin{cases} 1 & 2 \mid |w|_a \\ 0 & 2 \nmid |w|_a \end{cases}$

je Turing-izračunljiva.

5. Dokazati da je funkcija $x \mapsto \begin{cases} 1 & 2 \mid x \\ 0 & 2 \nmid x \end{cases}$
 Turing-izračunljiva

Ako je na traci neparno mnogo jedinica, vrati 1,
 a ako je parno mnogo jedinica, vrati 0.

čitanje
 neparnih
 jedinica $\left\{ \begin{array}{l} q_0 1 0 q_1 \\ q_1 0 R q_2 \\ q_0 0 0 q_5 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} q_2 1 0 q_3 \\ q_3 0 R q_0 \\ q_2 0 1 q_5 \end{array} \right.$ čitanje
 parnih
 jedinica

Ako smo naišli na 0, to
 znači da je poslednja pročitana
 jedinica parnosti koja odgovara onom
 drugom stanju.