

$$(x, y) \mapsto x - y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Tjuring - izračunljiva

$$0 \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_{x+1} 0 \underbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}_{y+1} 0$$

Želimo da nakon izvršavanja programa

dobijemo traku sa $x - y$ jedinica.

Ideja je da od prvog niza jedinica uklonimo $y+1$ jedinicu. Uklanjamo jedinice sa početka prvog niza i sa kraja drugog niza naizmenično.

Program završava izvršavanje u 2 slučaja:

1) Kada od drugog niza nije ništa ostalo - u prvom nizu je ostalo baš $(x+1) - (y+1) = x - y$ jedinica (realizuje se za $x \geq y$)

2) Kada od prvog niza nije ostalo ništa ($x < y$), tada $x - y = 0$, pa je neophodno još pobrisati višak jedinica drugog niza da bismo dobili praznu traku

$$\square$$

$$0 \textcircled{1} \textcircled{1} 1 0 \textcircled{1} \textcircled{1} 0 \quad 2 - 1 = 1$$

$$\square$$

$$0 \textcircled{1} \textcircled{1} 0 \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} 0 \quad 1 - 2 = 0$$

$\begin{matrix} q_0 1 0 q_1 \\ q_1 0 R q_2 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} q_0 1 0 q_1 \\ q_1 0 R q_2 \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{skida prvu jedinicu prvog niza i} \\ \text{otpočinje korak udesno} \end{array}$

$\begin{matrix} q_2 1 R q_2 \\ q_2 0 R q_3 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} q_2 1 R q_2 \\ q_2 0 R q_3 \end{matrix}} \right\} \text{idemo do kraja prvog niza}$

$\begin{matrix} q_3 1 R q_3 \\ q_3 0 L q_4 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} q_3 1 R q_3 \\ q_3 0 L q_4 \end{matrix}} \right\} \text{idemo do kraja drugog niza}$

$q_4 1 0 q_5$ - skidamo poslednju jedinicu drugog niza

$q_5 0 L q_6$ - vraćamo se na početak

$$\textcircled{1} 1 \dots 1 0 \textcircled{1} \dots \textcircled{1}$$

$q_6 0 0 q_7$ - program završava sa radom jer smo uklonili ceo drugi niz

$z_6 1 1 z_8$

$\begin{matrix} z_8 1 L z_8 \\ z_8 0 L z_9 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} z_8 1 L z_8 \\ z_8 0 L z_9 \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{idemo do početka drugog niza} \\ \text{(ulevo)} \end{array}$

$z_9 0 R z_{10}$ - ako od prvog niza nije ništa ostalo

$z_9 1 1 z_{11}$ - ako od prvog niza jeste nešto ostalo

$\begin{matrix} z_{11} 1 L z_{11} \\ z_{11} 0 R z_0 \end{matrix}$

$\begin{matrix} z_{10} 0 R z_{12} \\ z_{12} 1 0 z_{13} \\ z_{13} 0 R z_{12} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} z_{10} 0 R z_{12} \\ z_{12} 1 0 z_{13} \\ z_{13} 0 R z_{12} \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{podrutina za} \\ \text{brisanje viška} \\ \text{jedinica drugog} \\ \text{niza u slučaju} \\ x < y \end{array}$

1. Dokazati da je funkcija $(x, y) \mapsto (x+1)(y+1)$ Turing-izračunljiva.

$$\begin{array}{c} 0 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x+1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y+1} \end{array}$$

Ideja rešenja jeste da nakon niza od $y+1$ jedinica još x puta napišemo niz iste dužine i da za svaki novododati niz skidamo jednu jedinicu prvog broja.

Na početku, skidamo jednu jedinicu prvog niza (jer već imamo niz od $y+1$ puta, pa je potrebno da ga napišemo još x puta da bismo dobili $(x+1)(y+1)$). Nakon toga, pomeramo se jedno mesto udesno i počinjemo sa procedurom.

Ako se čita nula, od prvog niza nije ništa ostalo, pa završavamo program (*).

Ako se čita jedinica, zameni je sa 0 i kreni udesno. Niz od $y+1$ jedinica transformišemo u koraku udesno u niz od $y+1$ 0-a, a novododate nizove upisujemo u obliku simbola η_i (za svaki novi simbol η_i , vraćamo se na najlevlje 0 i vraćamo ga u 1 - vodimo evidenciju o tome koliko smo novih simbola upisali). Znamo da

smo nanizali $y+1$ simbola η ukoliko nije ostalo više ε (prvi sledeći simbol je η). Tada otpočijemo procedure ispočetka.
 (*): Neophodno je još pomoćni simbol η pretvoriti u 1.

$z_0 1 0 z_0$ } preprocedura
 $z_0 0 R z_1$

$z_1 1 0 z_2$ - skidamo 1 sa početka 1. niza
 $z_1 0 R z_{11}$ - ako od prvog niza nije ništa ostalo, završavamo program (*)

$z_2 0 R z_3$

$z_3 1 R z_3$ } pomeramo se do kraja
 $z_3 0 R z_4$ } prvog niza jedinica

$z_4 1 \varepsilon z_4$ } transformišemo 1 u ε
 $z_4 \varepsilon R z_4$ }
 $z_4 0 \eta z_5$ } idemo do kraja drugog niza i
 $z_4 \eta R z_4$ } na prvo slobodno mesto upisujemo η

$z_5 \eta L z_5$ }
 $z_5 \varepsilon L z_5$ } idemo do prvog ε i
 $z_5 0 R z_6$ } pretvaramo ga u 1
 $z_5 1 R z_6$ }

$0 \overset{1}{\varepsilon} \overset{1}{\varepsilon} \overset{1}{\varepsilon} - \overset{1}{\varepsilon} \eta$ $\eta - \eta$

$z_6 \varepsilon 1 z_7$
 $z_7 1 R z_8$

$z_8 \eta L z_9$ } ustanovimo da li je kraj ove procedure
 $z_8 \varepsilon \varepsilon z_9$ } (ukoliko su svi ε -i vraćeni u 1), ili moramo još

$z_9 1 L z_9$ } idemo na kraj
 $z_9 0 L z_{10}$ } prvog niza

$q_{10} 1 L q_{10}$ } idi na početak prvog niza
 $q_{10} 0 R q_1$ } i počni sa procedurom upet

$q_{11} 1 R q_{11}$ } procedura za transformisanje
 $q_{11} 1 L q_{12}$ } pomoćnog simbola n
 $q_{12} 1 R q_{11}$ } u 1 koja završava izvršavanje
 programa čim naiđe na prvu nulu
 (nemamo stanje $q_{10}---$)

Lemma: Ako je T Turingov program koji računa funkciju f , tada se modifikacijom od T može dobiti Turingov program T^* koji za ulaz n ima izlaz $f(n) + 1$ u obliku niza uzastopnih jedinica, pri čemu je glava smještena na najljevijoj jedinici.

dokaz: $\square$
 $--- \varepsilon 11 \underline{\varepsilon \varepsilon \varepsilon} 111 \varepsilon 110 ---$

Konstruirajmo pomoćnog simbola ε pratiću prazne ćelije koje su posećene od strane glave Turingove mašine u toku izvršavanja programa T

Od Turingovog programa T dobijamo T^* :

- 1) Zameniti 0 sa ε u svim četvorkama od T
- 2) Dodaj četvorku $q_i 0 \varepsilon q_i$ za svako stanje q_i programa T .

rezultat: 1) i 2) daju program koji radi isto što i T , samo su umesto nula u posećenim praznim ćelijama ε -i.

- 3) Za svaku situaciju u kojoj T prestaje sa radom (za instrukciju $q_i S---$ koja se ne pojavljuje u T) dodajemo instrukciju

$q_i S S q_M$ gde je M indeks koji je veći od indeksa svih stanja u T

(q_M je početno stanje potprograma koji okuplja jedinice na jedno mesto)

4) okupljanje jedinica:

$z_M \varepsilon R z_M$
 $z_M 1 R z_M$
 $z_M 0 1 z_{M+1}$ } idemo do kraja dela trake
koji je korišćen u dosadašnjem
radu i upisujemo dodatnu 1
($n \mapsto f(n+1)$)

$z_{M+1} 1 L z_{M+1}$
 $z_{M+1} \varepsilon 1 z_{M+2}$ } tražimo poslednje
e i menjamo ga sa 1

$z_{M+2} 1 R z_{M+2}$
 $z_{M+2} 0 L z_{M+3}$ } idemo do kraja niza

$z_{M+3} 1 0 z_{M+3}$
 $z_{M+3} 0 L z_{M+4}$ } višak jedinica (nastao zbog
zamene ε sa 1) brišemo

$z_{M+4} 0 R z_{M+5}$ - ako nije ostalo ε -a, već
samo stigli do poslednje
nule, tada je prvi desni simbol
najlevlja jedinica