

Def: Neka je $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$. Za funkciju $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ kažemo da je dobijena primenom operatora neograničene minimizacije na funkciju g i pišemo $f(\bar{x}) = (\mu y) (g(\bar{x}, y) = 0)$ ukoliko je:

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} y & \text{pri čemu je } y \text{ najmanji } \in \mathbb{N} \text{ takav da je} \\ & g(\bar{x}, y) = 0, \text{ ukoliko } y \text{ postoji} \\ \uparrow & \text{ukoliko takav } y \in \mathbb{N} \text{ ne postoji} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} g(\bar{x}, 0) \begin{array}{l} \xrightarrow{=0} f(\bar{x}) = 0 \\ \searrow \neq 0 \end{array} & g(\bar{x}, 1) \begin{array}{l} \xrightarrow{=0} f(\bar{x}) = 1 \\ \searrow \neq 0 \end{array} & g(\bar{x}, 2) \begin{array}{l} \xrightarrow{=0} f(\bar{x}) = 2 \\ \searrow \neq 0 \end{array} \\ & & g(\bar{x}, 3) \dots \end{array}$$

Def: Klasa parcijalno rekurzivnih funkcija je najmanja klasa koja sadrži osnovne aritmetičke funkcije i zatvorena je za supstituciju, primitivnu rekurziju i neograničenu minimizaciju. Za funkciju kažemo da je rekurzivna ako je parcijalno rekurzivna i totalna.



Primer: $g(x, y, z) = |x - (y + z)| \in \mathcal{PR}$

$$f(x, y) = (\mu z) (g(x, y, z) = 0)$$

$$f(x, y) = (\mu z) (|x - (y + z)| = 0)$$

$$f(4, 2) = (\mu z) (|4 - (2 + z)| = 0) = 2$$

$$f(3, 3) = (\mu z) (|3 - (3 + z)| = 0) = 0$$

$$f(2, 4) = (\mu z) (|2 - (4 + z)| = 0) \text{ ne postoji}$$

$$f(2, 4) \uparrow$$

f nije totalna $\Rightarrow f$ je parcijalno rekurzivna.

1. Dokazati da je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1 & 3 \mid x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$ parcijalno rekurzivna.

$3 \mid x$ akko $\exists g \in \mathbb{N}$ tdj $x = 3 \cdot g$

$$(M_g)(x = 3 \cdot g) = \begin{cases} \frac{x}{3} & 3 \mid x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

$$f(x) = \mathcal{L}_1((M_g)(x = 3g))$$

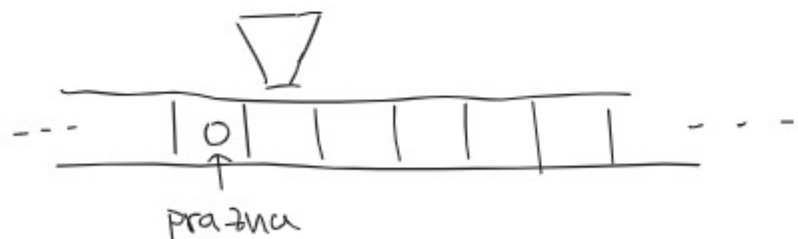
2. Dokazati da je $f(x, y) = \begin{cases} x \div y & x \geq y \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$ parcijalno rekurzivna.

$x \geq y$ akko $\exists k \in \mathbb{N}$ tdj $x = y + k$

$$(M_g)(x = y + g) = \begin{cases} x \div y & x \geq y \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

Tjuringove mašine

Hardver Tjuringove mašine se sastoji od 1) trake (beskonačna u oba smjera) koja je podijeljena na ćelije i 2) glave koja čita i piše



Alfabet Tjuringove mašine se sastoji od :

- 1) simbola koji se mogu naći u ćelijama trake : $S_0, S_1, S_2, \dots$ (pretpostavljamo da ih ima beskonačno mnogo). $S_0 = 0$ $S_1 = 1$
- 2) simbola koji predstavljaju unutrašnja stanja : $z_0, z_1, \dots$ (pretpostavljamo da ih imamo beskonačno mnogo). Podrazumeva se da je z_0 početno

stanje bilo kog Turingovog programa
3) simbola akcije - simboli koji diktiraju glavi
šta treba da uradi u datom trenutku:

a) L - "levo"

b) R - "desno"

c) simboli koji se mogu naći u ćelijama
trake - "upiši u trenutnu ćeliju dati simbol"

Turingov program se sastoji od četvorki oblika

$q_i S A q_j$

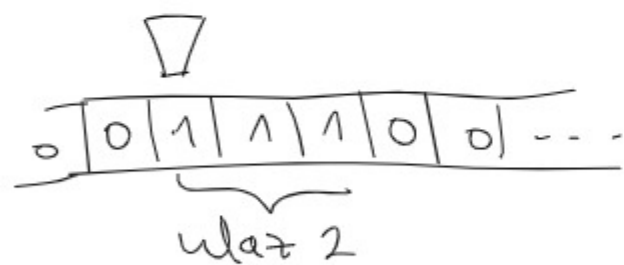
koja kaže "Ako je program u stanju q_i i glava
čita simbol S , uradi akciju A i pređi u stanje
 q_j "

Def: Turingov program je svaki konzistentni skup
četvorki. Za skup četvorki X kažemo da je
konzistentan ukoliko:

$$q_i S A q_j \in X \text{ i } q_i S A' q_j' \in X \Rightarrow A = A' \text{ i } q_j = q_j'$$

Ulazna konvencija: Da bismo prosledili Turingovoj
mašini $n \in \mathbb{N}$ kao argument, upisujemo u $n+1$
uzastopnu ćeliju simbol $S_1 = 1$ (da bi i $n=0$
bilo prosledeno kao neprazna traka)

Podrazumeva se da u stanju q_0 glava čita
ćeliju sa najvećom jedinicom



Izlazna konvencija: Turingov program T prestaje
sa izvršavanjem ukoliko ne postoji četvorka
koja se može primeniti i pritom je izlaz programa
 T broj jedinica koji se nalazi na traci

$\dots | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | \dots$
 Izlaz 2

Def: Funkcija koju računa Turingov program T obeležavamo sa ℓ_T . Za funkciju f kažemo da je Turing-izračunljiva ako postoji Turingov program T takav da je $f = \ell_T$.

1. Dokazati da je funkcija sledbenik ($n \mapsto n+1$) Turing-izračunljiva.

$$T = \emptyset$$

$\dots | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | \dots$

2. Dokazati da je nula-funkcija ($n \mapsto 0$) Turing-izračunljiva.

□

$\dots | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | \dots$

}
 □

$| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |$

}
 □

$\dots | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | \dots$

↓

;
 ;

□

$\dots | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | \dots$

↓

□

$\dots | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \dots$

↓

□

$| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |$

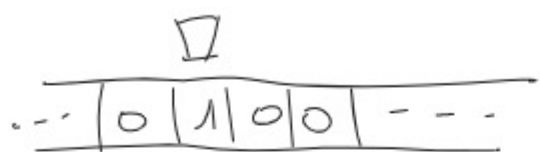
$2_0 1 0 2_1 \leftarrow$ brisanje 1

$2_1 0 R 2_0 \leftarrow$ pomeranje u desno

← u stanju sam 2_0
 i glava čita 0, a ne
 postoji četvorka oblika $2_0 0 \dots$

2. Dokažati da je sgn Turing-izračunljiva

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$$



$q_0 1 R q_1$

$q_1 0 L q_2$

$q_1 1 1 q_4$

$q_2 1 0 q_3$

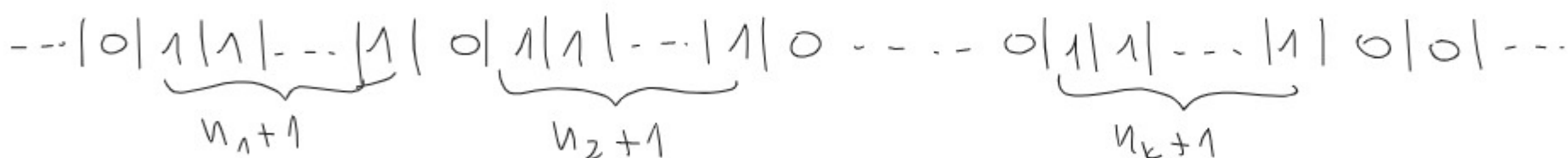
(nećemo imati stanja koja potiču sa q_3 da bi ovde izvršavanje stalo)

$q_4 1 0 q_5$

$q_5 0 R q_4$ } podnizina za brisanje viška jedinica

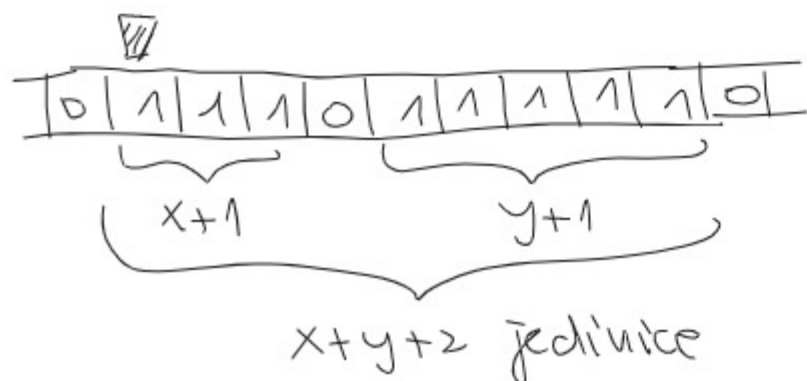
Šta ćemo za funkcije sa više argumenata?

Proširena ulazna konvencija; ulaz $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ prosledjujemo programu kao:



Podrazumeva se da je glava na početku izračunavanja na najlevljoj jedinici.

3. Dokažati da je funkcija $f(x, y) = x + y$ Turing-izračunljiva.



Treba nam traka sa $x+y$ jedinica. Stoga, neophodno je napisati program koji briše ove dve jedinice viška

To možemo uraditi tako što obrišemo 2 jedinice prvog broja ($x \geq 1$), dok u slučaju $x=0$ brišemo jednu jedinicu prvog niza i jednu jedinicu drugog niza.

$$z_0 1 0 z_1$$

$$z_1 0 R z_2$$

$$z_2 1 0 z_0 \leftarrow (\text{ ne postoji četvorka oblika } z_0 0 \dots, \text{ pa ovdje program završava})$$

$$z_2 0 R z_3$$

$$z_3 1 0 z_0$$

4. Dokazati da je $f(x,y) = x \div y$ Turing-izračunljiva.