

$$K(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x$$

$$z = \binom{x+y+1}{2} + x$$

$$n = x + y + 1$$

$$\binom{n}{2} \leq z < \binom{n+1}{2}$$

$$n = (\mu_2 \leq z) \wedge (z < \binom{n+1}{2})$$

$$x = k_1(z) = z - \binom{n}{2} = z - (\mu_2 \leq z) \wedge (z < \binom{n+1}{2}) \left. \vphantom{z} \right\} \Rightarrow k_1 \wedge k_2 \in PR$$

$$k_2(z) = y = n - (x+1) = (\mu_2 \leq z) \wedge (z < \binom{n+1}{2}) - (k_1(z) + 1)$$

Pomoću kodiranja parova, možemo kodirati i nizove veće dužine:

$$1) K(x_1, x_2) := K(x_1, x_2)$$

$$2) K(x_1, x_2, \dots, x_n) = K(K(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \quad \text{za } n \geq 3$$

$$\lceil K(x_1, x_2, x_3) = K(K(x_1, x_2), x_3)$$

$$K(x_1, x_2, x_3, x_4) = K(K(x_1, x_2, x_3), x_4) =$$

$$K(K(K(x_1, x_2), x_3), x_4)$$

;

Namena ovog kodiranja je ta što je neophodno da fiksiramo dužinu nizova koje u jednom trenutku želimo da kodiramo (jer neki nizovi različitih dužina imaju isti kod).

$$\lceil K(0, 0) = \binom{0+0+1}{2} + 0 = \binom{1}{2} + 0 = 0 + 0 = 0$$

$$K(0, 0, 0) = K(K(0, 0), 0) = K(0, 0) = 0$$

;

$$K(0, 0, \dots, 0) = 0$$

Želimo da budemo u mogućnosti da istovremeno kodiramo konačne nizove svih dužina

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \mathbb{N}^3 \cup \dots = \bigcup_{k \geq 1} \mathbb{N}^k$$

(skup svih konačnih nizova prirodnih brojeva)

Želimo bijekciju $\Pi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$

$$\Pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + 2^{x_1+x_2+x_3+2} + \dots + 2^{x_1+\dots+x_n+(n-1)} \div 1$$

$$\Pi \in PR$$

Želimo da pronađemo funkciju $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ koja je inverzna funkciji Π

π treba da za dati $n \in \mathbb{N}$ da odgovor na pitanje "koji niz konačne dužine se pri Π slika u n ?"

$$\begin{aligned} n = \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \dots + 2^{x_1+\dots+x_n+(n-1)} \div 1 \\ &= 2^{x_1} \left(1 + 2^{x_2+1} + \dots + 2^{x_2+\dots+x_n+(n-1)} \right) \div 1 \end{aligned}$$

neparno

$$x_1 = (n+1)_0$$

$$\pi_1(n) = (n+1)_0 \leftarrow \text{prva projekcija}$$

$$\frac{n+1}{2^{x_1}} = 1 + 2^{x_2+1} + \dots + 2^{x_2+\dots+x_n+(n-1)}$$

$$1 + 2^{x_2+1} + \dots + 2^{x_2+\dots+x_n+(n-1)} = \left\lfloor \frac{n+1}{2^{(n+1)_0}} \right\rfloor$$

$$2^{x_2+1} \left(1 + 2^{x_3+1} + \dots + 2^{x_3+\dots+x_n+(n-2)} \right) = \left\lfloor \frac{n+1}{2^{(n+1)_0}} \right\rfloor \div 1$$

neparan

$$x_2+1 = \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2^{(n+1)_0}} \right\rfloor \div 1 \right)_0$$

$$\Rightarrow x_2 = \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2^{(n+1)_0}} \right\rfloor \div 1 \right)_0 \div 1$$

$$\Rightarrow \pi_2(n) = \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2^{(n+1)_0}} \right\rfloor \div 1 \right)_0 \div 1 \leftarrow \text{druga projekcija}$$

⋮

Indukcijom lako vidimo da su sve projekcije π_k (funkcija koja daje k -ti član datog konačnog niza) primitivno rekurzivne

U primitivno rekurzivnoj semi smo imali da je $f(x, y+1)$ definisana preko $f(x, y)$

Šta ćemo u slučaju da je $f(x,y)$ definisana preko $f(x',y')$ za neke $x' \leq x$ i $y' \leq y$

Pokušaćemo da to prevaziđemo uz pomoć kodiranja $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$. Dobra stvar kod $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$ jeste ta što su te funkcije rastuće po svakoj koordinati.

Stoga, naopredašnji problem rešavamo kreiranjem funkcije koja će "pamtiti" vrednosti funkcije f u svim vredenim parovima čiji se kodovi manji od koda (x,y) .

1. $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definisana je sa:

$$f(x,0) = x^3 + 5$$

$$f(x,y+1) = y \cdot f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor, y\right) + 2x$$

Dokazati da je $f \in PR$.

Uvodimo pomoćnu funkciju:

$$g(t) = \prod \left(\underbrace{f(k_1(0), k_2(0))}_{\substack{\text{tačka čiji je} \\ \text{kod } K=0}}, \underbrace{f(k_1(1), k_2(1))}_{\substack{\text{tačka čiji} \\ \text{je kod } K=1}}, \dots, \underbrace{f(k_1(t), k_2(t))}_{\substack{\text{tačka čiji je} \\ \text{kod } K=t}} \right)$$

↑
čuva podatak o vrednosti funkcije f u svim parovima čiji je kod $K \leq t$

$$f(x,y) = \pi_{K(x,y)+1}(g(K(x,y)))$$

Dalje, $g \in PR \Rightarrow f \in PR$.

Dokažimo da $g \in PR$:

$$g(0) = \prod (f(k_1(0), k_2(0))) = \prod (f(0,0)) = \prod (5) = 2^5 - 1 = 31 \in \mathbb{N}$$

$$g(t+1) = \prod \left(\underbrace{f(k_1(0), k_2(0))}_{\pi_1(g(t))}, \dots, \underbrace{f(k_1(t), k_2(t))}_{\pi_{t+1}(g(t))}, \underbrace{f(k_1(t+1), k_2(t+1))}_{\substack{\text{ostaje još ovo} \\ \text{da izrazimo} \\ \text{preko } g(t)}} \right)$$

$$f(k_1(t+1), k_2(t+1)) = \begin{cases} k_1(t+1)^3 + 5, & k_2(t+1) = 0 \\ \left((k_2(t+1) - 1) \cdot f\left(\left\lfloor \frac{k_1(t+1)}{2} \right\rfloor, k_2(t+1) - 1 \right) \right) + 2 \cdot k_1(t+1) \end{cases}$$

Stoga, neophodno je još izraziti $f\left(\left\lfloor \frac{k_1(t+1)}{2} \right\rfloor, k_2(t+1) - 1\right)$

preko $g(t)$

Ispitujemo da je $\mathcal{K}(\lfloor \frac{k_1(t+1)}{2} \rfloor, k_2(t+1)) \leq t$

jer smo tada sigurni da je informacija o $f(\lfloor \frac{k_1(t+1)}{2} \rfloor, k_2(t+1)-1)$ sadržana u $g(t)$

$$\lfloor \frac{k_1(t+1)}{2} \rfloor < k_1(t+1)$$

$$k_2(t+1)-1 < k_2(t+1)$$

$$\mathcal{K}(\lfloor \frac{k_1(t+1)}{2} \rfloor, k_2(t+1)-1) < \mathcal{K}(k_1(t+1), k_2(t+1)) = t+1$$

$$t' = \mathcal{K}(\lfloor \frac{k_1(t+1)}{2} \rfloor, k_2(t+1)-1) \leq t$$

$$f(\lfloor \frac{k_1(t+1)}{2} \rfloor, k_2(t+1)-1) = \mathcal{K}_{t'+1}(g(t))$$

$$\Rightarrow g \in \text{PR} \Rightarrow f \in \text{PR}.$$

2. Dokazati da je $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data sa
 $f(n) = n$ -ta cifra broja $\sqrt{2}$
primitivno-rekurzivna

$$\sqrt{2} = 1,414\dots$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 1$$

$\vdots$

$$f(0) = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = r(\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^0 \rfloor, 10)$$

$$f(1) = r(\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^1 \rfloor, 10)$$

$$f(2) = r(\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^2 \rfloor, 10)$$

$\vdots$

$$f(k) = r(\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^k \rfloor, 10)$$

Treba još ispitati kako se $\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^k \rfloor$ izražava primitivno-rekurzivno.

$$\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^k \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq \sqrt{2} \cdot 10^k < n+1$$

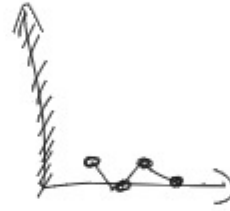
n je najmanje takvo da $\sqrt{2} \cdot 10^k < (n+1)^2$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 10^{2k} < (n+1)^2$$

$$\underbrace{[\sqrt{2} \cdot 10^k]}_{\in \mathbb{PR}} = n = (M_g \leq 2 \cdot 10^k) (2 \cdot 10^{2k} < (g+1)^2) \\ \Rightarrow f \in \mathbb{PR}.$$

Def: Ackermannova funkcija $A: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ data je sa:

- 1) $A(0, w) = w + 1$
- 2) $A(n+1, 0) = A(n, 1)$
- 3) $A(n+1, w+1) = A(n, A(n+1, w))$



Stav: Ackermannova funkcija nije primitivno rekurzivna.

Dokaz: Iskoristi se činjenica da za svaku primitivno rekurzivnu funkciju $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ postoji konstanta c takva da je $\forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ ispunjeno:

$$f(x_1, \dots, x_k) < A(c, \max\{x_1, \dots, x_k\})$$

Stoga, ako $A \in \mathbb{PR} \Rightarrow x \mapsto A(x, x) \in \mathbb{PR}$

$$\Rightarrow \exists c \text{ takva da je } \begin{aligned} g(x) &< A(c, x) \\ \text{za } x=c & \quad g(c) < A(c, c) \\ & \quad A(c, c) < A(c, c) \quad \text{!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \notin \mathbb{PR}.$$