

Def: Za skup/relaciju kažemo da je primitivno rekurzivna ukoliko je takva odgovarajuća karakteristična funkcija.

Posledica: Ako su A i B primitivno rekurzivni skupovi, tada su i A^c , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ primitivno rekurzivni.

$$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$$

$$\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$$

Posledica: Ako su R i T primitivno rekurzivne relacije, tada su i $\neg R$, $R \vee T$, $R \wedge T$ primitivno rekurzivne.

1. Dokazati da je svaki konačan podskup skupa $\mathbb{N}$ primitivno rekurzivan.

$$\chi_\emptyset = \overline{Z} \quad \checkmark$$

Za neprazne konačne skupove primećujemo da ih možemo doživeti kao konačnu uniju jednočlanih skupova, te je dovoljno dokazati da su jednočlani skupovi primitivno rekurzivni.

Za $a \in \mathbb{N}$ dokazujemo da je $\chi_{\{a\}} \in PR$

$$\chi_{\{a\}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\chi_{\{a\}}(x) = \begin{cases} 1 & x=a \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$x=a \quad \text{akko} \quad |x-a|=0$$

$$\chi_{\{a\}}(x) = \overline{\text{sgn}} |x-a| = \begin{cases} 1 & x=a \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$\chi_{\{a\}}(x) = \overline{\text{sgn}} |x-a| = \overline{\text{sgn}} |x - \mathcal{L}_a(x)| \in PR$$

Posledica: Svaki konačan podskup skupa $\mathbb{N}$ je primitivno rekursivan.

2. Dokazati da su $=, <, >, \leq, \geq$ primitivno rekursivne relacije.

$$\begin{aligned}\leq &\equiv \neg > \equiv < \vee = \\ \geq &\equiv \neg < \equiv > \vee =\end{aligned}$$

$$\chi_{=} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\chi_{=}(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} |x - y| = \chi_{=}(x, y) \in \mathcal{PR}$$

$$\chi_{<} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\chi_{<}(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$x < y \quad \text{akko} \quad 0 < y - x \quad \text{akko} \quad \operatorname{sgn}(y - x) = 1$$

$$\chi_{<}(x, y) = \operatorname{sgn}(y - x)$$

$$\chi_{>} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\chi_{>}(x, y) = \begin{cases} 1 & x > y \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$\chi_{>}(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$$

3. Dokazati da je relacija $|$ primitivno rekursivna.

$$\chi_{|} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\chi_{|}(x, y) = \begin{cases} 1 & x | y \\ 0 & x \nmid y \end{cases}$$

$x|y$ ako je ostatak broja y pri deljenju sa x jednak nuli ako je $r(y, x) = 0$

$$\chi_1^{(1)}(x, y) = \overline{\text{sgn}}(r(y, x)).$$

Napomena: $r(y, 0) = y$

$r(0, 0) = 0$, pa imamo da $0|0$

Ako želimo da izbegnemo da $0|0$, možemo:

$$\chi_1^{(2)}(x, y) = \overline{\text{sgn}}(r(y, x)) = \chi_{\neq 0 y}(x) \cdot \chi_{\neq 0 y}(y)$$

4. Dokazati da je funkcija $D(x) = \text{broj delilaca broja } x$ primitivno rekurzivna.

Dokazali smo da je ograničena suma primitivno rekurzivne funkcije takođe primitivno rekurzivna.

$$D(x) = \sum_{y \leq x} \chi_1(y, x) \in PR$$

$$\text{Napomena: } D(0) = \sum_{y \leq 0} \chi_1(y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \chi_1^{(1)} \\ 0 & \text{ako } \chi_1^{(2)} \end{cases} = \chi_1(0, 0)$$

Znamo da 0 ima beskonačno mnogo delilaca, pa formalno ovakva funkcija ne bi bila definisana za argument 0, pa ni primitivno rekurzivna.

5. Dokazati da je skup prostih brojeva P primitivno rekurzivan.

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \text{ prost} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

x je prost broj ako je $x \neq 0$ i $x \neq 1$; x ima najviše 2 delioca.

$$\chi_P(x) = \underbrace{\chi_{\neq 0 y}^c(x)}_{\in PR} \cdot \underbrace{\chi_{\neq 1 y}^c(x)}_{\in PR} \cdot \underbrace{\overline{\text{sgn}}(D(x) - 2)}_{\substack{\in PR \\ \chi_2(x)}} \in PR$$

6. Neka je $R(\bar{u}, n)$ primitivno rekurzivna relacija dužine $k+1$ ($|\bar{u}|=k$) i neka su P i Q relacije definisane sa:

$$P(\bar{u}, n) = (\forall p < n) R(\bar{u}, p)$$

$$Q(\bar{u}, n) = (\exists p < n) R(\bar{u}, p)$$

Dokazati da su P i Q primitivno rekurzivne.

$$\left. \begin{aligned} \chi_P(\bar{u}, 0) &= 1 = c_1 \\ \chi_P(\bar{u}, n+1) &= \chi_P(\bar{u}, n) \cdot \chi_R(\bar{u}, n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \chi_P \in PR$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_Q(\bar{u}, 0) &= 0 = c_0 \\ \chi_Q(\bar{u}, n+1) &= \text{sgn}(\chi_Q(\bar{u}, n) + \chi_R(\bar{u}, n)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \chi_Q \in PR$$

7. Ograničeni operator minimizacije:

Ako je $f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, tada je i funkcija $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ definisana sa:

$$g(\bar{x}, z) = \begin{cases} \text{najmanje } y \in \{0, 1, \dots, z\} \text{ taj } f(\bar{x}, y) = 0 & \text{ako postoji} \\ z+1 & \text{inače} \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.

$$g(\bar{x}, 0) = \begin{cases} \text{najmanje } y \in \{0\} \text{ taj } f(\bar{x}, y) = 0 & \text{ako postoji} \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ako } f(\bar{x}, 0) = 0 \\ 1 & \text{ako } f(\bar{x}, 0) \neq 0 \end{cases} = \text{sgn}(f(\bar{x}, 0))$$

$$g(\bar{x}, z+1) = \begin{cases} \text{najmanje } y \in \{0, \dots, z, z+1\} \text{ taj } f(\bar{x}, y) = 0 & \text{ako postoji} \\ z+2 & \text{inače} \end{cases}$$

$$g(\bar{x}, z+1) \stackrel{\uparrow}{=} g(\bar{x}, z) \cdot \text{sgn}(f(\bar{x}, g(\bar{x}, z))) + (z+2) \cdot \text{sgn}(f(\bar{x}, g(\bar{x}, z)))$$

ako postoji $y \in \{0, \dots, z\}$

taj $f(\bar{x}, y) = 0$

ili $f(\bar{x}, z+1) = 0$

ako $f(\bar{x}, g(\bar{x}, z)) = 0$

Napomena: Funkciju $g(\bar{x}, z)$ zapisujemo kao $\mu_{y \leq z} (f(\bar{x}, y) = 0)$

8. Ako je R primitivno rekurzivna relacija dužine $k+1$ ($R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$), dokazati da je i funkcija $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ data sa:

$$g(\bar{x}, z) = \begin{cases} \text{najmanje } y \in \{0, \dots, z\} \text{ taj } R(\bar{x}, y) & \text{ako postoji} \\ z+1 & \text{inače} \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.

Napomena: Funkciju $g(\bar{x}, z)$ zapisujemo u obliku $\mu_{y \leq z} (R(\bar{x}, y))$

Primer: Ako je R relacija $\leq$
 $g(3, 0) = \mu_{y \leq 0} (3 \leq y) = 1$

$$g(3, 1) = \mu_{y \leq 1} (3 \leq y) = 2$$

$$g(3, 2) = \mu_{y \leq 2} (3 \leq y) = 3$$

$$g(3, 3) = \mu_{y \leq 3} (3 \leq y) = 3$$

$$g(3, 4) = \mu_{y \leq 4} (3 \leq y) = 3$$

$\vdots$

9. Dokazati da je funkcija $\text{sgrt}(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil$ primitivno rekurzivna.

$$\lceil \sqrt{x} \rceil = k \quad \text{akko} \quad k \leq \sqrt{x} < k+1$$

$$\text{akko} \quad k^2 \leq x < (k+1)^2$$

k je najmanji (jer je jedini) koji zadovoljava ove dve relacije

$$\text{sgrt}(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil = \mu_{y \leq x} (y^2 \leq x \wedge x < (y+1)^2)$$

$\nwarrow \nearrow$
konjunkcija dve primitivno rekurzivne relacije

$\Rightarrow$ jeste $\in PR$ po prethodnom zadatku.

10. Funkcija $\text{div}_2(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ jeste primitivno rekurzivna.

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = k \quad \text{akko} \quad k \leq \frac{x}{2} < k+1$$

$$\text{akko} \quad 2k \leq x < 2(k+1)$$

$$\text{div}_2(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \mu_{y \leq x} (2y \leq x \wedge x < 2(y+1)).$$