

1. Dokazati da je funkcija  $f$  data sa:

$$f(x, 0) = 2^x$$

$$f(x, y+1) = y \cdot f(3x, y) + 5x$$

rekurzivna.

Uvodimo pomoćnu funkciju

$$F(e, x, y) = \begin{cases} 2^x & y=0 \\ (y-1) \varphi_e(3x, y-1) + 5x & y \neq 0 \end{cases}$$

Jasno,  $F$  je izračunljiva (Gedelovo kodiranje)

$$F(e, x, y) = 2^x \cdot \chi_{\{0\}}(y) + ((y-1) \cdot \varphi_e(3x, y-1) + 5x) \cdot (1 - \chi_{\{0\}}(y))$$

$\Rightarrow$  Po S-M-N teoremi  $\exists s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  izračunljiva  
tdj  $F(e, x, y) \stackrel{(1)}{=} \varphi_{s(e)}(x, y)$

$\Rightarrow$  Po TFT  $\exists e_0 \in \mathbb{N}$  tdj  $\varphi_{s(e_0)} \stackrel{(2)}{=} \varphi_{e_0}$

$$\varphi_{e_0}(x, y) \stackrel{(2)}{=} \varphi_{s(e_0)}(x, y) \stackrel{(1)}{=} F(e_0, x, y) = \begin{cases} 2^x & y=0 \\ (y-1) \varphi_{e_0}(3x, y-1) + 5x & y \neq 0 \end{cases}$$

$f := \varphi_{e_0}$  je funkcija sa početka zadatka  
 $\Rightarrow f$  jeste izračunljiva.

Def:  $C^{(1)}$  je skup svih unarnih izračunljivih  
funkcija

Teorema (Rays): Neka je  $A \in C^{(1)}$  takav da je  
 $A \neq \emptyset$  i  $A \neq C^{(1)}$ . Tada predikat " $\varphi_x \in A$ " nije  
odlučiv. Ekvivalentno, skup  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in A\}$   
nije izračunljiv.

Def: Skup  $A$  iz prethodne teoreme zovemo indeksnim skupom za  $A$ .

Prethodna teorema kaže da ni jedan netrivialan (različit od  $\emptyset$  i od  $\mathbb{N}$ ) indeksni skup nije izračunljiv.

Primeri: 1) Ako je  $g$  neka izračunljiva funkcija, tada " $\varphi_x = g$ " nije odlučiv  
 $\Leftrightarrow A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x = g\}$  nije izračunljiv  
jer je ovo indeksni skup za  $A = \{g\}$   
 $A \in C^{(1)}$  jer je  $g$  izračunljiva  
 $A \neq \emptyset$  i  $A \neq C^{(1)}$  jer  $g(x)+1 \in C^{(1)} \setminus A$

2) Predikat " $\exists x$  je beskonačan skup" nije odlučiv  $\Leftrightarrow A = \{x \mid \exists x \text{ je beskonačan skup}\}$  nije izračunljiv:

$A = \{f \in C^{(1)} \mid \text{Dom}(f) \text{ je beskonačan skup}\} \in C^{(1)}$   
 $A \neq \emptyset$  jer  $\text{Id}_{\mathbb{N}} \in A$   
 $A \neq C^{(1)}$  jer  $\epsilon_1 \notin A$   
Dakle,  $A$  nije izračunljiv.

Rajs-Šapirova teorema: Neka je  $A \in C^{(1)}$  i  
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in A\}$ . Ako je  $A$  nabrojiv skup,  
važi ekvivalencija:

$f \in A$  akko postoji konačna funkcija  $\theta \in A$  takva da je  $\theta \leq f$

Def: Za funkciju  $\theta$  kažemo da je konačna ako je  $\text{Dom}(\theta)$  konačan skup.

Def: Pišemo  $\theta \leq f$  ako je  $\text{Dom}(\theta) \in \text{Dom}(f)$  i  $f|_{\text{Dom}(\theta)} = \theta$   
( $\theta$  je neka restrikcija od  $f$ )

2. Skup  $\{x \mid \varphi_x \text{ je totalna}\}$  nije nabrojiv.

$$A = \{f \in C^{(1)} \mid f \text{ je totalna } \gamma \subseteq C^{(1)}\}$$

$A = \{x \mid \psi x \text{ je totalna}\}$  je indeksni skup za  $A$ .  
Ukoliko bi  $A$  bio nabrojiv, tada bi po R-S teoremi  
važilo:

$$f \in A \text{ akko } \underbrace{\exists \text{ konačna } \theta \in A}_{\text{Dow}(\theta) \text{ je konačan skup i } \theta \text{ je totalna (Dow}(\theta) = \mathbb{N})} \text{ tdy } \theta \subseteq f$$

$\Rightarrow A$  nije nabrojiv.

3. Dokazati da skup  $\{x \mid \psi x \text{ nije totalna}\}$  nije nabrojiv.

$$A = \{f \in C^{(1)} \mid \text{Dow}(f) \neq \mathbb{N}\}$$

$A = \{x \mid \psi x \text{ nije totalna}\}$  je indeksni skup za  $A$ .

Ukoliko je  $A$  nabrojiv, važi:  
 $f \in A$  akko  $\exists \theta \in A$  konačna i  $\theta \subseteq f$ .

$$\text{Posmatrajmo } \theta(x) = \begin{cases} 0 & x=1 \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

$$\text{Dow}(\theta) = \{1\} \text{ i } \theta(x) = (\uparrow)(x=1) \text{ , pa je}$$

$\theta$  je konačna, izračunljiva i  $\theta \in A$

Međutim,  $\psi_0$  je totalna funkcija i  $\theta \subseteq \psi_0$ ,  
pa bi po R-S teoremi bilo  $\psi_0 \in A$   
Ali  $\psi_0$  je totalna, pa  $\psi_0 \notin A$   $\nexists$

4. Dokazati da skup  $A = \{x \mid \psi x \neq \emptyset \text{ i } \psi x \circ \psi x \text{ je "1-1"}\}$  nije nabrojiv.

$$A = \{f \in C^{(1)} \mid \text{Dow}(f) \neq \emptyset \text{ i } f \circ f \text{ je "1-1"}\}$$

$A$  je indeksni skup za  $A$ .

Ako bi  $A$  bio nabrojiv, važila bi ekvivalencija iz R-S teoreme.

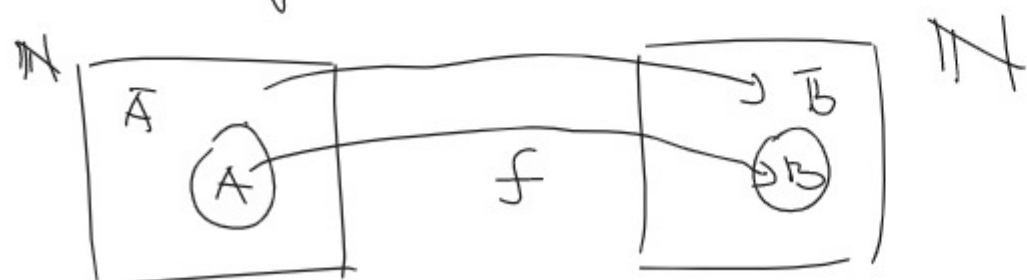
$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

$\emptyset \in A$  jer  $\text{Dom}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$  i  $\emptyset \circ \emptyset$  jeste "1-1"  
 jer je  $\text{Dom}(\emptyset \circ \emptyset) = \{\emptyset\}$ .  
 $\emptyset$  jeste produkcija za  $\emptyset$  i  $\emptyset \notin A$  jer  
 $\emptyset \circ \emptyset = \emptyset$  nije "1-1"

Stoga,  $A$  nije nabrojiv.

$m$ -svodljivost

Def: Skup  $A$  je  $m$ -svodljiv na skup  $B$  ( $m$  oznaci  $A \leq_m B$ ) ukoliko postoji totalna izračunljiva funkcija takva da  $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ .



$A \leq_m B$   
 akko  
 $\bar{A} \leq_m \bar{B}$

Posledica: 1) Ako je  $A \leq_m B$  i  $B$  izračunljiv  $\Rightarrow$   
 $A$  je izračunljiv  
 2) Ako je  $A \leq_m B$  i  $B$  nabrojiv  $\Rightarrow$   
 $A$  je nabrojiv.

dokaz: 1)  $\chi_B$  je izračunljiva i  $A \leq_m^f B$

$x \in A$  akko  $f(x) \in B$  akko  $\chi_B(f(x)) = 1$   
 $x \in \bar{A}$  akko  $f(x) \in \bar{B}$  akko  $\chi_B(f(x)) = 0$

$\chi_A(x) = \chi_B(f(x))$  a  $\chi_B \circ f$  je  
 izračunljiva kao kompozicija takvih  
 $\Rightarrow A$  je izračunljiv.

2) Posmatramo samo modifikovanu karakterističnu

$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$

$A \leq_m^f B$

$$\chi_A = \chi_B \circ f$$

Dakle, modifikovana karakteristična za  $A$  je izračunljiva, pa je  $A$  nabrojiv.

1. Ako je  $A = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$  i  $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ .  
Dokazati da je  $A \leq_m B$ .

Želimo totalnu izračunljivu  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  t.d.j.  
 $x \in A$  ako  $f(x) \in B$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \in B & x \in A \\ 3 \notin B & x \notin A \end{cases}$$

$$f(x) = \chi_1(x) \chi_A(x) + \chi_3(x) (1 - \chi_A(x))$$

$\Rightarrow f$  je izračunljiva

2. Neka je  $A = \{x \mid \varphi_x = 0\}$  i  $K = \{x \mid x \in \mathcal{W}_x\}$ .  
Dokazati da  $K \leq_m A$

Tražimo  $K \stackrel{f}{\leq}_m A$ , t.j.  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  t.d.j.  
 $x \in K$  ako  $f(x) \in A$   
 $x \in \mathcal{W}_x$  ako  $\varphi_{f(x)} = 0$

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{W}_x \\ 1 & x \notin \mathcal{W}_x \end{cases} = \chi_0(\chi_K(x)) \Rightarrow g \text{ je izračunljiva}$$

$\uparrow$   
modifikovana

za  $K$  je izračunljiva  
jer je  $K$  nabrojiv

$\Gamma \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{W}_x \\ 1 & x \notin \mathcal{W}_x \end{cases}$  ne prolazi  
jer  $K$  nije  
izračunljiva

Stoga, po S-M-N teoremi postoji  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  t.d.j.  
 $g(x, y) = \varphi_{f(x)}(y)$

$$\underline{x \in K} \Leftrightarrow x \in W_X \Leftrightarrow (\forall y) g(x, y) = 0 \Leftrightarrow (\forall y) \varphi_{f(x)}(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{f(x)} = \varepsilon_0 \Leftrightarrow \varphi_{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \underline{f(x) \in A}$$

$$3. \quad A = \{x \mid x \in E_x\} \quad ; \quad K = \{x \mid x \in W_x\}.$$

Dokazati da  $K \leq_m A$ .

Želimo izračunljivu  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  koja  $K \leq_m^f A$ .

$x \in K$  ako  $f(x) \in A$

$x \in W_x$  ako  $f(x) \in E_{f(x)}$

$$g(x, y) = \begin{cases} y & x \in W_x \\ \uparrow & x \notin W_x \end{cases}$$

$g(x, y) = y \cdot \chi_K(x) \Rightarrow g$  je izračunljiva,  
 $\uparrow$   
 modifikovana  
 karakteristična  
 pa po S-M-N teoremi  
 $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  t.d.j.

$$g(x, y) = \varphi_{f(x)}(y)$$

$$x \in K \Leftrightarrow x \in W_x \Leftrightarrow (\forall y) g(x, y) = y \Leftrightarrow (\forall y) \varphi_{f(x)}(y) = y$$

$$\Rightarrow \varphi_{f(x)}(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) \in E_{f(x)} \Rightarrow f(x) \in A$$

Obratno, za  $x \notin K$  je  $g(x, y) \uparrow \Rightarrow \varphi_{f(x)}(y) \uparrow$

$$\Rightarrow E_{f(x)} = \emptyset \Rightarrow f(x) \notin E_{f(x)} \Rightarrow f(x) \notin A$$

Stav: Svaki nabrojiv skup  $A$  je  $w$ -svodljiv na  $K$ .

4. Neka je  $A_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$  i  $A_2 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$ .

Dokazati da su  $A_1$  i  $A_2$  nabrojni, ali da ne postoji izračunljiv skup  $B$  takav da  $A_1 \subseteq B$  i  $A_2 \subseteq B^c$ .

$$x \in A_1 \Leftrightarrow (\exists s) (\underbrace{\varphi_{x,s}(x) = 0}_{\text{odlučiv predikat}}) \Rightarrow A_1 \text{ je nabrojiv}$$

$x \in A_2 \Leftrightarrow (\exists s) (\underbrace{\chi_{x,s}(x)=1}_{\text{odluživ predikat}}) \Rightarrow A_2 \text{ je nabrojiv}$

Pps da takvo  $B$  postoji  $\Rightarrow \chi_B$  je izračunljiva  
 $A_1 \subseteq B$   
 $A_2 \subseteq B^c$   
 $\chi_B = \chi_e$  za nekog  $e \in \mathbb{N}$

$$e \in B \Rightarrow \underbrace{\chi_e(e)=1}_{\chi_B(e)} \Rightarrow e \in A_2 \subseteq B^c \Rightarrow e \in B^c \quad \text{✗}$$

$$e \notin B \Rightarrow \underbrace{\chi_e(e)=0}_{\chi_B(e)} \Rightarrow e \in A_1 \subseteq B \Rightarrow e \in B \quad \text{✗}$$

Dakle,  $B$  ne postoji.