

Def: Predikat $P \subseteq \mathbb{N}^k$ je parcijalno odlučiv ako je funkcija

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako važi } P(x) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

izračunljiva.

Teorema: $P \subseteq \mathbb{N}^k$ je parcijalno odlučiv $\Leftrightarrow$ postoji odlučiv predikat $Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ za koji je:
 $P(\bar{x}) \Leftrightarrow (\exists y) Q(\bar{x}, y) \quad (|\bar{x}| = k)$

dokaz:

$\Rightarrow$: $P \subseteq \mathbb{N}^k$ parcijalno odlučiv

$$\chi_P(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ako važi } P(\bar{x}) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

je izračunljiva. $\chi_P = \chi_e$

$$P(\bar{x}) \Leftrightarrow \chi_P(\bar{x}) \downarrow \Leftrightarrow \chi_e(\bar{x}) \downarrow \Leftrightarrow (\exists s) \chi_{e,s}(\bar{x}) \downarrow$$

izračunljivo,
tj. ovo je odlučiv
predikat po s i $\bar{x}$

$$\Leftarrow P(\bar{x}) \Leftrightarrow (\exists y) Q(\bar{x}, y)$$

gde je Q odlučiv

$$\chi_1 \left((\forall y) \left(\underbrace{\chi_Q(\bar{x}, y) = 1}_{\text{izračunljivo}} \right) \right) = \chi_P(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & P(\bar{x}) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

Teorema: $P \subseteq \mathbb{N}^k$ je odlučiv predikat akko su
 P i $\bar{P} = \mathbb{N}^k \setminus P$ parcijalno odlučivi

predikati	skupovi
odlučivi	izračunljivi
parcijalno odlučivi	nabrojivi

Primer: 1) " $x \in W_x$ " ni je odlučiv jen
 $K = \{x \mid x \in W_x\}$ ni je izračunljiv

" $x \in W_x$ " jeste parcijalno odlučiv jen
 K jeste nabrojiv

$x \in W_x$ akko $\varphi_x(x) \downarrow$ akko $(\exists s) \varphi_{x,s}(x) \downarrow$
odlučiv
predikat

$\Rightarrow$ " $x \notin W_x$ " ni je parcijalno odlučiv

2) " $x \in E_y$ " ni je odlučiv

" $x \in E_y$ " akko $(\exists z) (x = \varphi_y(z))$
 akko $(\exists z) (\exists s) (x = \varphi_{y,s}(z))$
odlučiv

$\Rightarrow$ " $x \in E_y$ " jeste parcijalno odlučiv
 akko $(\exists t) (t = K(z, s) \wedge x = \varphi_{y,s}(z))$

$\Rightarrow$ " $x \notin E_y$ " ni je parcijalno odlučiv

3) " $W_x \neq \emptyset$ " jeste parcijalno odlučiv

" $W_x \neq \emptyset$ " akko $(\exists y) (y \in W_x)$
 akko $(\exists y) (\varphi_x(y) \downarrow)$
 akko $(\exists y) (\exists s) (\varphi_{x,s}(y) \downarrow)$
 akko $(\exists t) (t = K(y, s) \wedge \varphi_{x,s}(y) \downarrow)$

Teorema parametrizacije
 (S-M-N teorema)

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

za fiksirano $x \in \mathbb{N}$, gledamo $y \mapsto f(x, y)$

Ako je f izračunljiva funkcija $f = \varphi_e^{(2)}$, tada
 je i f^x isto izračunljiva $\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}$ takoj
 $f^x = \varphi_s^{(1)}$

Ovo s zavisi od x i od e

Teorema parametrizacije: Postoji izračunljiva funkcija $s: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ takva da je
 $\varphi_e(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \varphi_{s(x_1, \dots, x_m)}(y_1, \dots, y_n)$

Napomena: s zavisi i od e .

Oblik koji ćemo najčešće koristiti:

$$f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) \quad \text{gde je } s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ izračunljiva}$$

$$f(x, y, z) = \varphi_{s(x, y)}(z), \quad \text{gde je } s: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \text{ izračunljiva}$$

$$= \varphi_{t(x)}(y, z), \quad \text{gde je } t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ izračunljiva}$$

1. Dokazati da postoji totalna unarna funkcija
 $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takva da je
 $W_{k(x)} = E_{k(x)} = x \cdot \mathbb{N} = \{0, x, 2x, 3x, \dots\}$

$$f(x, y) \stackrel{S-M-N}{\uparrow} \varphi_{k(x)}(y)$$

$$\varphi_{k(x)}(y) \downarrow \text{ ako } y \in x \cdot \mathbb{N} = \{0, x, 2x, \dots\} \quad \left. \vphantom{\varphi_{k(x)}(y)} \right\} \text{ Ovo želimo}$$

$$\varphi_{k(x)}(y) = y \quad \text{za } y \in x \cdot \mathbb{N}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} y & y \in x \cdot \mathbb{N} \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} y & \times | y \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y & (\exists t)(y = t \cdot x) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

$$f(x, y) = y \cdot \chi_1(\mu t)(y = t \cdot x)$$

f je izračunljiva, pa po S-M-N teoremi
 zaista postoji takva funkcija k .

2. Dokazati da postoji totalna funkcija
 $s: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ takva da je
 $W_{s(x,y)} = W_x \cup W_y$

$$f(x,y,z) \underset{\substack{\uparrow \\ S-M-N}}{=} \varphi_{s(x,y)}(z)$$

$$\varphi_{s(x,y)}(z) \downarrow \Leftrightarrow z \in W_x \cup W_y$$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & z \in W_x \cup W_y \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

Ova funkcija je modifikovana funkcija predikata
 $\text{"}z \in W_x \cup W_y\text{"}$, pa je ona izračunljiva ako je
 predikat $\text{"}z \in W_x \cup W_y\text{"}$ parcijalno odlučiv

$$\begin{aligned} \text{"}z \in W_x \cup W_y\text{"} &\Leftrightarrow z \in W_x \vee z \in W_y \\ &\Leftrightarrow \varphi_x(z) \downarrow \vee \varphi_y(z) \downarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists s) \varphi_{x,s}(z) \downarrow \vee (\exists s) \varphi_{y,s}(z) \downarrow \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$(\exists s) (\underbrace{\varphi_{x,s}(z) \downarrow \vee \varphi_{y,s}(z) \downarrow}_{\text{unija 2 izračunljiva skupa je izračunljiv}})$$

(disjunkcija 2 odlučiva predikata je odlučiva)

$\Rightarrow f$ je izračunljiva.

Stoga, postoji tražena funkcija s .

3. Pokazati da predikat $\text{"}\varphi_x \equiv 0\text{"}$ nije odlučiv

Pps da $\text{"}\varphi_x \equiv 0\text{"}$ jeste odlučiv

$$\Rightarrow \chi_{\text{"}\varphi_x \equiv 0\text{"}}(x) = \begin{cases} 1 & \varphi_x \equiv 0 \\ 0 & \varphi_x \not\equiv 0 \end{cases} \text{ je izračunljiva}$$

Posmatrajmo pouložnu funkciju

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in w_x \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$$

f je izračunljiva jer je

$$f(x,y) = \chi_{\underbrace{\{x \in w_x\}}_{\text{modifikovana karakteristična}}}(x)$$

$$\text{modifikovana karakteristična} = \begin{cases} 1 & x \in w_x \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ S-M-N teorema

$\exists s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ izračunljiva i takva da je

$$f(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$$

$$\underbrace{\chi_{\{x \in w_x\}}(s(x))}_{\text{izračunljiva}} = \begin{cases} 1 & \varphi_{s(x)} \equiv 0 \\ 0 & \varphi_{s(x)} \not\equiv 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \forall y \varphi_{s(x)}(y) = 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \forall y f(x,y) = 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in w_x \\ 0 & \text{inače} \end{cases} = \chi_K$$

Međutim, " $x \in w_x$ " nije odlučivo ($\Leftrightarrow K$ nije izračunljivo)

Teorema o fiksnoj tački

Teorema: Ako je $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ totalna izračunljiva funkcija, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{f(n)} = \varphi_n$.

Napomena: Ovo ne znači $f(n) = n$!!!

Primer: $f(n) = n+1 = s(n)$

Ako je neka funkcija izračunljiva, tada se ona u nizu dobijenom Godelovim kodiranjem javlja ∞ mnogo puta.

1. Dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\ell_n(x) = x^n$.

Želimo da primenimo TFT:

Motivacija: $x^n = \ell_n(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TFT} \\ (\text{za neku } f \\ \text{koja nam} \\ \text{odgovara})}}{=} \ell_{f(n)}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S-M-N}}}{=} g(n, x) = x^n$

Stoga, definišimo $g(x, y) = y^x$
 g je izračunljiva $\Rightarrow$ po S-M-N teoremi
 postoji f takva da $g(x, y) = \ell_{f(x)}(y)$
 Po TFT $\exists n \in \mathbb{N}$ takoj $\ell_{f(n)} = \ell_n$

$$y^n = g(n, y) = \ell_{f(n)}(y) = \ell_n(y) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ takoj } \ell_n(x) = x^n$$

2. Dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $W_n = \{n\}$ i $E_n = \{n\}$

$$\text{Želimo } \ell_n(y) = \begin{cases} y & y = n \\ \uparrow & y \neq n \end{cases}$$

Motivacija: $\ell_n(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TFT}}}{=} \ell_{s(n)}(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S-M-N}}}{=} \ell(n, y) = \begin{cases} y & y = n \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$

$$f(x, y) = \begin{cases} y & x = y \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

$f(x, y) = y \cdot \chi_{\{x=y\}} \Rightarrow f$ izračunljiva

Po S-M-N teoremi $\exists s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takoj

$$f(x, y) = \ell_{s(x)}(y)$$

$n=y$
 inače

$$\left. \begin{array}{l} y \\ \uparrow \end{array} \right\} = f(n, y) = \varphi_{s(n)}(y) = \varphi_n(y)$$

Očigledno, $W_n = \Sigma n$ i $E_n = \Sigma n$.

3. Dokazati da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je
 $W_n = \{1, 4, 7, 10, \dots\} = \{1 + 3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ i
 $E_n = \{0, n, 2n, 3n, \dots\} = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{N}\}$

Želimo $\varphi_n(y) \downarrow$ akko $y = 1 + 3k \quad k \in \mathbb{N}$
 Uradimo: $1 + 3k \mapsto k \cdot n$

$$f(x, y) = \begin{cases} k \cdot x \\ \uparrow \\ = \begin{cases} \lceil \frac{y-1}{3} \rceil \cdot x \\ \uparrow \end{cases} \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 1 + 3k \\ \text{inače} \\ y = 1 + 3k \\ \text{inače} \end{array}$$

$$f(x, y) = \lceil \frac{y-1}{3} \rceil \cdot x \quad \chi_1((\mu_k)(y = 1 + 3k))$$

$$= x \cdot (\mu_k)(y = 1 + 3k) \Rightarrow f \text{ je izračunljiva}$$

$\Rightarrow$ po S-M-N teoremi $\exists s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takj

$$f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$$

Po TFT postoji $n \in \mathbb{N}$ takj $\varphi_{s(n)} = \varphi_n$, pa je:

$$\varphi_n(y) = \varphi_{s(n)}(y) = f(n, y) = \begin{cases} \lceil \frac{y-1}{3} \rceil \cdot n \\ \uparrow \end{cases} \quad \begin{array}{l} y \in 1 + 3\mathbb{N} \\ \text{inače} \end{array}$$

$$W_n = 1 + 3\mathbb{N}$$

$$E_n = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{N}\}$$

jen sliku $k \cdot n$ dobijemo
 za $y = 1 + 3k \in 1 + 3\mathbb{N} = W_n$