

Aritmetička hijerarhija

Imali smo Godelovo kodiranje, tj. $\{P_e\}_{e \geq 0}$ svih Turingovih programa (ekvivalentno, niz $\{\varphi_e\}_{e \geq 0}$ svih izračunljivih funkcija).

Kažemo da $x \in \mathbb{N}$:

$x \in \text{dom}(\varphi_e) \Leftrightarrow \varphi_e(x) \downarrow \Leftrightarrow P_e$ završava izvršavanje za ulaz x .

Def: $W_e := \text{dom}(\varphi_e)$ je halting skup za P_e
 $E_e = \text{Im}(\varphi_e)$ je slika od $P_e = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ y = \varphi_e(x)\}$
 $= \varphi_e[W_e]$

Def: Pišemo $\varphi_{e,s}(x) = y \Leftrightarrow e, x, y < s$ i y je izlaz programa P_e za ulaz x u manje od s koraka (Turingove mašine).

Stav: 1) $\varphi_{e,s}(x) = y$ je izračunljiva relacija po e, s, x, y
2) $\varphi_{e,s}(x) \downarrow$ je izračunljiva relacija po e, s, x .
($\varphi_{e,s}(x) \downarrow \Leftrightarrow e, x < s$ i P_e izbacuje izlaz $< s$ za ulaz x u $< s$ koraka)

dokaz: 1) $\left. \begin{array}{l} e < s \\ x < s \\ y < s \end{array} \right\}$ izračunljive relacije po e, s, x, y

Nakon ove provere, možemo Univerzalnoj Turingovoj mašini proslediti (e, x) i izvršiti prvih $s-1$ koraka.

Ako dobijemo izlaz y u

Ako ne dobijemo izlaz y u

2) domaći

Def: $W_{e,s} = \text{dom}(\varphi_{e,s}) = \{x \in \mathbb{N} \mid P_e \text{ izbacuje za ulaz } x \text{ izlaz } y < s \text{ u } < s \text{ koraka}\}$ za $e < s$
 $= \{y \text{ za } e \geq s$

Jasno, $W_{e,s}$ konacan $\Rightarrow W_{e,s}$ je izracunljiv i
 $W_e = \bigcup_{s \geq 0} W_{e,s}$

Pritom, $W_{e,s} \subseteq W_{e,s+1}$, te je ovo jedan
rastuci niz skupova, pa skupove $W_{e,s}$ zovemo
izracunljivim aproksimacijama za W_e .

Def: Neka je $R \subseteq \mathbb{N}^2$ izracunljiva relacija i $A \subseteq \mathbb{N}$.

- 1) Kažemo da $A \in \Sigma_1^0$ ukoliko $x \in A \Leftrightarrow (\exists y) R(x, y)$
- 2) Kažemo da $A \in \Pi_1^0$ ukoliko $x \in A \Leftrightarrow (\forall y) R(x, y)$
- 3) $\Delta_1^0 := \Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$

1. $A \in \Sigma_1^0$ akko $\bar{A} = \mathbb{N} \setminus A \in \Pi_1^0$

$\Rightarrow$: $A \in \Sigma_1^0$
 $x \in A$ akko $(\exists y) R(x, y)$ gde je $R \subseteq \mathbb{N}^2$
neka izracunljiva
relacija

$x \in \bar{A}$ akko $x \notin A$ akko $\neg (\exists y) R(x, y)$
akko $(\forall y) \neg R(x, y)$

$\neg R$ je isto izracunljiva relacija
($\chi_{\neg R} = 1 - \chi_R$)

$\Rightarrow \bar{A} \in \Pi_1^0$

$\Leftarrow$ domaci

Teorema (o normalnoj formi): Ako je $A \subseteq \mathbb{N}$, tada
su sledeca tvrdjenja ekvivalentna:

- 1) A je nabrojiv
- 2) $A \in \Sigma_1^0$
- 3) $A = W_e$ za neko $e \in \mathbb{N}$

Posledica: $A \in \Delta_1^0$ akko je A izracunljiv

dokaz: A je izracunljiv akko su A i $\bar{A}$
nabrojivi akko su A i $\bar{A} \in \Sigma_1^0$
akko $A \in \Sigma_1^0$ i $\bar{A} \in \Pi_1^0$

akko $A \in \Sigma_1^0$ i $A \in \Pi_1^0$ akko $A \in \Delta_1^0$

2. Dokazati da su sledeći skupovi nabrojivi:

$$1) K_1 = \{x \mid W_x \neq \emptyset\}$$

$$2) E_e = \{y \mid \exists x \ \varphi_e(x) = y\} = \varphi_e(W_e)$$

$$3) \text{Graph}(\varphi_e) = \{K(x, y) \mid y = \varphi_e(x)\} \quad (\text{gde je } K: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \text{ neko izračunljivo kodiranje})$$

$$1) x \in K_1 \Leftrightarrow W_x \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists z)(z \in W_x) \Leftrightarrow (\exists z)(\exists s)(\underbrace{z \in W_{x,s}}_{\text{izračunljivo po } z, x \text{ i } s})$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)(y = K(z, s) \wedge z \in W_{x,s})$$

izračunljivo po z, x i s

Stoga, vidimo da zbog postojanja izračunljivih kodiranja $(\exists y_1)(\exists y_2) \dots (\exists y_k) R$ možemo tumačiti kao $(\exists y)(y = K(y_1, y_2, \dots, y_k) \wedge R)$ gde je

$$K: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$$

Potpuno analogno $(\forall y_1)(\forall y_2) \dots (\forall y_k) R$ tumačimo kao $(\forall y)(y = K(y_1, y_2, \dots, y_k) \wedge R)$

$$2) y \in E_e \Leftrightarrow (\exists x)(y = \varphi_e(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists s)(y = \varphi_{e,s}(x)) \Leftrightarrow$$

$$(\exists z)(z = K(x, s) \wedge \underbrace{y = \varphi_{e,s}(x)}_{\text{dokazali smo u stavu da je ste izračunljivo}})$$

dokazali smo u stavu da je ste izračunljivo

$$3) z \in \text{Graph}(\varphi_e) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = K(x, y) \wedge y = \varphi_e(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\exists s)(z = K(x, y) \wedge y = \varphi_{e,s}(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists t)(\underbrace{t = K(x, K(y, s))}_{\text{način da kodiramo } \mathbb{N}^3 \text{ preko kodiranja } \mathbb{N}^2}) \wedge z = K(x, y) \wedge y = \varphi_{e,s}(x)$$

3. Ako je γ izračunljiva funkcija, a A nabrojiv $\Rightarrow$

$$1) \gamma(A) \text{ je nabrojiv}$$

$$2) \gamma^{-1}(A) \text{ je nabrojiv}$$

$$\text{Ako je } A = \emptyset \Rightarrow \gamma(A) = \gamma^{-1}(A) = \emptyset$$

Ako je $A = \mathcal{U}_e(\mathbb{N})$ gde je $\mathcal{U}_e$ neka totalna izračunljiva funkcija

1) $\psi(A) = \psi(\mathcal{U}_e(\mathbb{N})) = (\psi \circ \mathcal{U}_e)(\mathbb{N}) = E_f$
 $\psi \circ \mathcal{U}_e$ ne mora biti totalna funkcija, ali znamo da je $\psi \circ \mathcal{U}_e = \mathcal{U}_f$ ($\mathcal{U}_f$ izračunljiva funkcija kao kompozicija izračunljivih)
 E_f je nabrojiv (deo 2) prethodnog zadatka)

2) $\psi^{-1}(A)$ A je nabrojiv $\Rightarrow A$ je $\text{dom}(\mathcal{U}_e) = W_e$

$\psi^{-1}(A)$ je stoga $\text{dom}(\mathcal{U}_e \circ \psi) = \text{dom}(\mathcal{U}_f) = W_f$
 gde je $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_e \circ \psi$ izračunljiva kao kompozicija takvih

Po teoremi o normalnoj formi je $\psi^{-1}(A)$ nabrojiv.

4. Dokazati da je skup
 $A = \{ p(x) \mid [\frac{x}{2}] \in W_{[\frac{x}{2}]} \}$ nabrojiv
 $p(x)$ = redni broj sa indeksom x ($p(0)=2, p(1)=3, \dots$)

Dokazali smo da $p \in PR \Rightarrow p$ je izračunljiva

$B = \{ x \mid [\frac{x}{2}] \in W_{[\frac{x}{2}]} \}$ važi
 $A = p(B)$

Po prethodnom zadatku, dovoljno je videti da je B nabrojiv

$x \in B \Leftrightarrow [\frac{x}{2}] \in W_{[\frac{x}{2}]} \Leftrightarrow [\frac{x}{2}] \in K$

$K = \{ x \mid x \in W_x \}$ je nabrojiv jer $x \in K \Leftrightarrow x \in W_x \Leftrightarrow \mathcal{U}_x(x) \downarrow \Leftrightarrow (\exists s) (\mathcal{U}_{x,s}(x) \downarrow)$

$x \xrightarrow{f} [\frac{x}{2}] = \text{div}_2(x) \in PR$, pa i izračunljivo

$x \in B \Leftrightarrow f(x) \in K \Leftrightarrow x \in f^{-1}(K)$
 $B = f^{-1}(K)$

$\Rightarrow B$ je nabrojiv po delu 2) prethodnog zadatka.

Odlučivost

Def: Za relaciju dužine k ($P \subseteq \mathbb{N}^k$) kažemo da je odlučivi predikat ako je data relacija izračunljiva (tj. ako je χ_P izračunljiva funkcija)

1. $P = "x \in W_x"$ nije odlučiv

(ovo odgovara skupu K koji jeste nabrojiv, pa pritom svodiemo na nenabrojivost od $\overline{K}$)

Pps P je odlučiv $\Rightarrow \chi_P(x) = \begin{cases} 1 & x \in W_x \\ 0 & x \notin W_x \end{cases} = \chi_K(x)$ je izračunljiva

Definišimo $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin W_x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases} \leftarrow$ funkcija čiji je halting skup $\overline{K}$

$f(x) = (U_t)(\underbrace{\chi_P(x) = 0}_{\text{izračunljiva relacija}}) \Rightarrow f$ je izračunljiva

$\Rightarrow f = \varphi_e$ za neko $e \in \mathbb{N}$

$$f(e) = \varphi_e(e)$$

$f(e) \downarrow$ ako $e \notin W_e$ Stoga, P nije odlučiv.

ako $\varphi_e(e) \uparrow$

2. $P = "x \in W_y"$ nije odlučiv

$\chi_P(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in W_y \\ 0 & x \notin W_y \end{cases}$ je izračunljiva ako je P odlučiv

$$C(x) := \chi_P(x, x) = \begin{cases} 1 & x \in W_x \\ 0 & x \notin W_x \end{cases}$$

$\Rightarrow C$ je baš predikat iz prethodnog zadatka. Ako je P odlučiv, i predikat iz prethodnog zadatka je odlučiv

3. $Q = "x \in E_x"$ nije odlučiv

Pps jeste odlučiv $\Rightarrow \chi_Q(x) = \begin{cases} 1 & x \in E_x \\ 0 & x \notin E_x \end{cases}$ je

izračunljiva

Definišemo $f(x) = \begin{cases} x & x \notin E_x \\ \uparrow & x \in E_x \end{cases}$

$$f(x) = x \cdot \chi_1((\uparrow)(\chi_Q(x)=0))$$

f je isto izračunljiva $\Rightarrow f = \varphi_e$ za neko $e \in \mathbb{N}$
 $e \in \underbrace{I_m(\varphi_e)}_{= E_e}$ akko $e \in I_m(f)$ akko $e \notin E_e$ $\downarrow$

4. $Q = "x \in E_y"$ nije odlučiv - domaći

5. $P = "\varphi_x$ je totalna"

Pps da P jeste odlučiv

$$\Rightarrow \chi_P(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

φ_x je totalna

φ_x nije totalna

je izračunljiva

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 \\ 0 \end{cases}$$

φ_x totalna

φ_x nije totalna

f je totalna i izračunljiva

$$f(x) = (\varphi_x(x) + 1) \cdot \chi_P(x)$$

$\Rightarrow \exists e \in \mathbb{N}$ taj $f = \varphi_e$ i φ_e je totalna

$$\Rightarrow f(e) = \varphi_e(e)$$

$$\varphi_e(e) + 1 = \varphi_e(e) \quad \downarrow$$