

Teorija izračunljivosti

20. vek

Čerč, Turing, Godel

$\mathbb{N}^k$

1) Pod aritmetičkom funkcijom podrazumevamo $f: D \rightarrow \mathbb{N}^l$, gde je $D \subseteq \mathbb{N}^k$.
Ukoliko je $D = \mathbb{N}^k$, kažemo da je f totalna, a
inače da je parcijalna.

2) Za $A \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je aritmetički skup i
njega možemo poistovetiti sa $\chi_A: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

3) Za $R \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je aritmetička relacija
dužine k i uju možemo poistovetiti sa χ_R .

Modeli izračunljivosti:

- 1) rekurzija
- 2) λ -račun
- 3) Turingove mašine
- 4) URM

Svi su oni međusobno
ekivalentni

Rekurzivne funkcije

Osnovne rekurzivne funkcije:

1) $Z: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $Z(x) = 0$ } možemo je doživeti i kao
funkciju bez argumenta
(operacija dužine 0)

2) $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $S(x) = x + 1$

3) $\Pi_i^k: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ za $1 \leq i \leq k$

$$\Pi_i^k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) = x_i$$

I Primitivna rekurzija:

Neka je $g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ i $h: \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$.
Za funkciju $f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ kažemo da je
dobijena primitivnom rekurzijom od funkcija g i h
ukoliko važi:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y+1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{aligned} \text{ gde je } |\bar{x}| = k$$

Pišemo da je $f = \text{Rec}(g, h)$

Napomena: $k=0$ dolazi u obzir

II: Supstitucija:

Neka je $g: \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{N}$ i $h_1, h_2, \dots, h_e: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$.
Za funkciju $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ kažemo da je
dobijena supstitucijom funkcija $h_1, \dots, h_e$ u
funkciju g ako je:

$$f(\bar{x}) = g(h_1(\bar{x}), h_2(\bar{x}), \dots, h_e(\bar{x})).$$

Pišemo $f = \text{Sup}(g, h_1, h_2, \dots, h_e)$

Def: Za funkciju f kažemo da je primitivno rekurzivna
ako je dobijena od osnovnih rekurzivnih
funkcija konačnom primenom pravila I i II.

Klasu primitivno rekurzivnih funkcija označavamo
sa PR.

1. Dokazati da je konstantna funkcija $c_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
primitivno rekurzivna ($n \in \mathbb{N}$)

$$c_n(x) = n$$

Dokaz sprovodimo indukcijom po n .

1^o baza: $n=0$:

u pitanju je funkcija Z ✓

2^o hipoteza: Neka je $c_n \in \text{PR}$

3^o korak: Dokazujemo za c_{n+1}

$$c_{n+1}(x) = n+1 = S(n) = S(c_n(x))$$

$$c_{n+1} = \text{Sup}(S, c_n) \in \text{PR}$$

Napomena: Konstantnu funkciju možemo doživeti
kao funkciju bez argumenta.

2. Dokazati da je funkcija prethodnik $\delta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna.

$$\delta(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ x & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 0 = \mathbb{Z} \\ \delta(y+1) &= y = \Pi_1^2(y, \delta(y)) \\ \delta &= \text{Rec}(\mathbb{Z}, \Pi_1^2) \Rightarrow \delta \in \mathcal{PR} \end{aligned}$$

3. Dokazati da je $+$: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna.

$$\begin{aligned} + &= \Pi_1^2(x, y) \\ +(x, 0) &= x = \Pi_1^1(x) \\ +(x, y+1) &= x + (y+1) = (x+y) + 1 = s(x+y) = \\ &= s(\Pi_3^3(x, y, +(x, y))) = \text{Sup}(s, \Pi_3^3) \end{aligned}$$

$$+ = \text{Rec}(\Pi_1^1, \text{Sup}(s, \Pi_3^3))$$

4. Dokazati da je $\times$: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna.

$$\begin{aligned} \times &= \Pi_1^2(x, y) \\ \times(x, 0) &= 0 = \mathbb{Z}(x) \\ \times(x, y+1) &= \times(x, y) + x = +(\times(x, y), x) = \\ &= \text{Sup}(+, \Pi_3^3, \Pi_1^3) \end{aligned}$$

$$\times = \text{Rec}(\mathbb{Z}, \text{Sup}(+, \Pi_3^3, \Pi_1^3)) \in \mathcal{PR}$$

5. Dokazati da je modifikovana funkcija oduzimanja (minus) primitivno rekurzivna

$$\dot{-}(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & x \geq y \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{-}(x, 0) &= x \dot{-} 0 = x - 0 = x = \Pi_1^1(x) \\ \dot{-}(x, y+1) &= x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = \delta(x \dot{-} y) = \\ &= \delta(\Pi_3^3(x, y, \dot{-}(x, y))) = \text{Sup}(\delta, \Pi_3^3) \end{aligned}$$

$$\dot{-} = \text{Rec}(\Pi_1^1, \text{Sup}(\delta, \Pi_3^3))$$

6. Dokazati da je $\text{sgn}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(0) = 0 = \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(y+1) &= 1 = \mathcal{L}_1(y) = \mathcal{L}_1(\Pi_1^2(y, \text{sgn}(y))) \\ &= \text{Sup}(\mathcal{L}_1, \Pi_1^2) \end{aligned}$$

$$\text{sgn} = \text{Rec}(\mathbb{Z}, \text{Sup}(\mathcal{L}_1, \Pi_1^2)) \in \mathcal{PR}.$$

7. Dokazati da je $\overline{\text{sgn}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data sa

$$\overline{\text{sgn}}(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

primitivno rekurzivna

$$\begin{aligned} \overline{\text{sgn}}(x) &= 1 \dot{-} \text{sgn}(x) = \mathcal{L}_1(x) \dot{-} \text{sgn}(x) = \\ &= (\mathcal{L}_1(x), \text{sgn}(x)) = \\ &= \text{Sup}(\dot{-}, \mathcal{L}_1, \text{sgn}). \end{aligned}$$

8. Dokazati da je $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ data sa

$$f(x, y) = |x - y|$$

primitivno rekurzivna.

$$f(x, y) = |x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = +((x \dot{-} y), (y \dot{-} x)) \in \mathcal{PR}$$

9. Ako je $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna, dokazati da je i funkcija $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data sa

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x)$$

primitivno rekurzivna.

$$g(0) = f(0)$$

$$\begin{aligned} g(y+1) &= \sum_{x \leq y+1} f(x) = \sum_{x \leq y} f(x) + f(y+1) = g(y) + f(y+1) \\ &= + (g(y), f(s(y))) \end{aligned}$$

$$= + (\Pi_2^2(y, g(y)), f(s(\Pi_1^2(y, g(y))))$$

$$= \text{Sup}(+, \Pi_2^2, \text{Sup}(f, \text{Sup}(s, \Pi_1^2)))$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{PR}$$

10. Ako je $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna, dokazati da je i $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data sa

$$g(y) = \prod_{x \leq y} f(x)$$

primitivno rekurzivna.

11. Dokazati da je funkcija $r: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ data sa

$$r(x, y) = \begin{cases} \text{ostatak pri deljenju } y \text{ sa } x & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

$$r(x, 0) = 0 = Z(x)$$

$$r(x, y+1) \stackrel{\uparrow}{=} (r(x, y) + 1) \cdot \text{sgn}(x \div (r(x, y) + 1))$$

problem nastaje
ako je $r(x, y) = x - 1$
jer je onda $y+1$ deljiv sa x

$$= x(s(r(x, y)), \text{sgn}(\div(x, s(r(x, y))))$$

$$\Rightarrow r \in \mathcal{PR}.$$