

Eliminacija kvantifikatora

Def: Neka je T neprotivredna teorija na jeziku L .
Kažemo da T ima eliminaciju kvantifikatora ako
za svaku L -formulu $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ postoji beskvantorna
formula $\psi(y_1, \dots, y_n)$ takva da:
$$T \models \forall y_1 \dots \forall y_n (\varphi(y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \psi(y_1, \dots, y_n))$$

Lema: Neka je T neprotivredna teorija, sledeće
tvrdnje su ekvivalentne:

- (1) T ima eliminaciju kvantifikatora
- (2) za svaku beskvantornu formulu $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$
postoji beskvantorna formula $\psi(y_1, \dots, y_n)$ takva
da $T \models \forall y_1 \dots \forall y_n (\exists x \varphi(x, y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \psi(y_1, \dots, y_n))$

Lema: Neka je T neprotivredna teorija. Sledeće
tvrdnje su ekvivalentne:

- (1) T ima eliminaciju kvantifikatora
- (2) za svaku formulu $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ koja je
konjunkcija literala koji sadrže x postoji
beskvantorna formula $\psi(y_1, \dots, y_n)$ takva da je
 $T \models \forall y_1 \dots \forall y_n (\exists x \varphi(x, y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \psi(y_1, \dots, y_n))$

1. Neka je $M = (D, E)$ model, gde je E relacija
ekvivalencije na D koja ima beskonačno mnogo
klasa i sve klase su dvočlane. Dokazati da
 $Th(M)$ ima eliminaciju kvantifikatora.

Dovoljno je ispitati da li se može eliminisati
kvantifikator u formuli $\exists x \varphi(x, y_1, \dots, y_n)$, gde je
 φ konjunkcija literala u kojima se pojavljuje x .

atomične formule:

$$x=x, E(x,x), x=y_i, E(x,y_i)$$

literali:

$$\underline{x=x}, \underline{E(x,x)}, \underline{x=y_i}, \underline{E(x,y_i)}$$
$$\underline{x \neq x}, \underline{\neg E(x,x)}, \underline{x \neq y_i}, \underline{\neg E(x,y_i)}$$

Ako formula sadrži kao konjunkt formulu $x \neq x$ ili $\neg E(x,x)$, tada je ona $\equiv \perp$

Ako formula sadrži $x=x$, ili $E(x,x)$, mi te atomizne formule možemo zanemariti.

Ako formula sadrži $x=y_i$ kao potformulu:
 $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = (x=y_i) \wedge \varphi'(x, y_1, \dots, y_n)$

tada je $\exists x \varphi \equiv \varphi'(y_i, y_1, \dots, y_n)$
Stoga, nadalje razmatramo samo:

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = \bigwedge_{i \in I} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i \in J} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i)$$

1° $J = \emptyset$

$$\varphi = \bigwedge_{i \in I} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i)$$

$\exists x \varphi \equiv \top$ jer D sadrži beskonačno mnogo elemenata, pa uvek možemo odabrati element x koji se razlikuje od konačno mnogo y_i $i \in I$ i koji nije u relaciji sa konačno mnogo y_i $i \in K$ jer imamo beskonačno mnogo klasa.

2° $J \neq \emptyset$

Neka je $j \in J$

$$\varphi = \bigwedge_{i \in I} x \neq y_i \wedge E(x, y_j) \wedge \bigwedge_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i)$$

$$\equiv \underbrace{\bigwedge_{i \in I} x \neq y_i \wedge E(x, y_j)}_{\text{deo sa promenljivom } x} \wedge \bigwedge_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} E(y_j, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} \neg E(y_j, y_i)$$

deo sa promenljivom x

Stoga, nadalje razmatramo eliminaciju kvantifikatora u formuli

$$\exists x \left(\bigwedge_{i \in I} x \neq y_i \wedge E(x, y_j) \right)$$

$\psi(x, y)$

više promenljivih

Pretpostavimo da je $\exists x \gamma$ tačna. Pošto su klase od E dvočlane, to imamo 2 mogućnosti:

1° $x = y_j$

$$\Rightarrow \bigwedge_{i \in I} y_j \neq y_i$$

2° $x \neq y_j$

$$\Rightarrow \bigwedge_{i \in I} (y_j = y_i \Leftrightarrow E(y_i, y_j))$$

$\Leftrightarrow$ sledi jer ako je y_i u relaciji E sa y_j , a različito od x koje je isto u relaciji sa y_j , tada je $y_i = y_j$ jer su klase dvočlane

$$\Theta : \left(\bigwedge_{i \in I} y_j \neq y_i \right) \vee \left(\bigwedge_{i \in I} (y_j = y_i \Leftrightarrow E(y_i, y_j)) \right)$$

Videli smo da $\models \exists x \gamma \Rightarrow \Theta$

Ostaje još $\models \Theta \Rightarrow \exists x \gamma$

Neka važi Θ :

1° Ako važi $\bigwedge_{i \in I} y_j \neq y_i$, $x = y_j$ zadovoljava γ

2° Ako važi $\bigwedge_{i \in I} (y_j = y_i \Leftrightarrow E(y_i, y_j))$, uzmemo za

x onaj drugi element (različit od y_j) koji je sa y_j u relaciji.

2. Neka je E relacija ekvivalencije na skupu A koja ima samo dve beskonačne klase. Dokazati da teorija $Th(A)$, gde je $A = (A, E)$ ima eliminaciju kvantifikatora.

Isto kao u prethodnom zadatku, razmatramo samo formule oblika

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = \bigwedge_{i \in I} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i \in J} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i)$$

$$\varphi'(x, y_1, \dots, y_n) = \bigwedge_{i \in J} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i)$$

$$\vdash \exists x \varphi \Rightarrow \exists x \varphi' \quad \text{o\v{c}igledno}$$

$\vdash \exists x \varphi' \Rightarrow \exists x \varphi$ jer je domen A beskonačan, i klase su beskonačne, pa uvek možemo izabrati x koji je u klasi sa y_i $i \in J$, nije u klasi sa y_i $i \in K$ i razlikuje se od svih konačno mnogo y_i $i \in I$

Stoga, razmatramo $\bigwedge_{i \in J} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i)$

1° $K = \emptyset$: $\varphi = \bigwedge_{i \in J} E(x, y_i)$

$$\exists x \varphi = \exists x \left(\bigwedge_{i \in J} E(x, y_i) \right) \equiv \bigwedge_{i, j \in J} E(y_i, y_j)$$

2° $J = \emptyset$: $\varphi = \bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i)$

$$\exists x \varphi = \exists x \left(\bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i) \right) \equiv \bigwedge_{i, j \in K} \neg E(y_i, y_j)$$

jer imamo samo dve klase

3° $J \neq \emptyset$ i $K \neq \emptyset$
 $j \in J$ $k \in K$

$$\varphi = \bigwedge_{i \in J} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} \neg E(x, y_i)$$

$$\exists x \varphi \equiv \bigwedge_{i, l \in J} E(y_i, y_l) \wedge \bigwedge_{i, l \in K} \neg E(y_i, y_l)$$

3. Neka je $M = (\mathbb{Q}, <, E, E')$, gde su E i E' relacije zadate sa:

$E(a, b)$ akko $a - b \in \mathbb{Z}$

$E'(a, b)$ akko $a - b \in 2\mathbb{Z}$.

Dokazati da $Th(M)$ nema eliminaciju kvantifikatora.

$$(0 < x) \wedge E(x, 0) \wedge \neg (\exists y) (0 < y < x \wedge E(y, 0))$$

formula koja definiše 1
preko parametra 0.

Ako bi postojala beskvantorna formula $\varphi(x, 0)$ koja definiše 1, u kojoj se pojavljuje samo jedna slobodna promenljiva, a vezanih nema.

Stoga, literali koji se u $\varphi(x, 0)$ mogu pojavljivati su:

$$x < 0, x = 0, 0 < x, E(x, 0), E'(x, 0)$$

i njihove negacije

Kako x treba da opiše 1, smisleno je konstitui:

$$0 < x, E(x, 0), \neg E'(x, 0)$$

Svi neparni x -evi
zadovoljavaju sva tri uslova.

4. Neka je $M = (\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, s)$, gde je

$$Z(z) \text{ akko } z \in \mathbb{Z}$$

$$s(z) = z + 1$$

Dokazati da $Th(M)$ ima eliminaciju kvantifikatora

termi:

promenljive, ili $s^n(x)$

literali:

$$Z(x)$$

$$\neg Z(x)$$

$$x = y_i$$

$$x \neq y_i$$

$$x = s^n(y_i)$$

$$x \neq s^n(y_i)$$

$$y_i = s^n(x)$$

$$y_i \neq s^n(x)$$

ni ne
razma-
tramo

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(s^n(x)) \equiv Z(x) \\ s^n(y_i) = s^m(x) \\ \equiv y_i = s^{m-n}(x) \end{array} \right. \quad (m \geq n)$$

Ako se unutar formule pojavljuju suprotstavljeni literali (kao konjuktii) $\Rightarrow$ formula je $\equiv \perp$

Ako je $\alpha(x)$ atomična formula, tada je

$$\alpha(x) \equiv \alpha(s(x))$$

Ako je $\alpha(x, y)$ atomična formula, tada je

$$\alpha(x, y) \equiv \alpha(s(x), s(y))$$

Indukcijom, lako dokazujemo da analogno važi i za $s^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ako formula sadrži potformulu $y_i = s^n(x)$, tj.

$$\varphi = y_i = s^n(x) \wedge \varphi'(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\equiv y_i = s^n(x) \wedge \varphi'(s^n(x), s^n(y_1), \dots, s^n(y_n))$$

$$\equiv (y_i = s^n(x)) \wedge \varphi'(y_i, s^n(y_1), \dots, s^n(y_n))$$

$$\exists x \varphi \equiv \varphi'(y_i, s^n(y_1), \dots, s^n(y_n))$$

$\Rightarrow$ očigledno

$\Leftarrow$ Pitamo se da li postoji x takav da je $y_i = s^n(x)$

Da, $s^n: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ je jedna bijekcija (pa i "na").

Preostaje da se razmotre mogućnosti kada je φ :

$$1^\circ \quad Z(x) \wedge \bigwedge_{i \in I} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i \in J} x \neq s^{n_i}(y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} s^{n_i}(x) \neq y_i$$

$$2^\circ \quad \neg Z(x) \wedge \bigwedge_{i \in I} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i \in J} x \neq s^{n_i}(y_i) \wedge \bigwedge_{i \in K} s^{n_i}(x) \neq y_i$$

U oba slučaja treba naći x koje ispunjava konačno mnogo ulova različitosti, uz to da je u slučaju $1^\circ \quad x \in \mathbb{Z}$, a u slučaju $2^\circ \quad x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. To svakako možemo uraditi jer su $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ beskonačni.

Stoga, $\equiv T$.