

Kardinalnost najviše kontinuum nije aksiomatizabilna

Pretpostavimo suprotno - da postoji teorija  $T$  koja aksiomatizuje ovu klasu na jeziku  $L$   
 $L' = L \cup \{C_i \mid i \in I\}$

$I$  kardinalnosti strogo veće od  $\kappa$   
(npr.  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ )

$$T' = T \cup \{C_i \neq C_j \mid i \neq j\}$$

$T''$  neka konačna podteorija od  $T'$   
u  $T''$  se pojavljuje samo konačno mnogo aksioma oblika  $C_i \neq C_j \quad i \neq j$   
(bilo, neka se pojavljuju samo  $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$ )  
Jedan model za  $T''$  je  $\{1, 2, \dots, k\}$

$$C_{i_1} \mapsto 1$$

$$C_{i_2} \mapsto 2$$

$$\vdots$$
$$C_{i_k} \mapsto k$$

$\uparrow$   
jedan konačan skup, pa je  $i$  kardinalnosti najviše  $\kappa$

teorema  $\Rightarrow$  i  $T'$  ima model  $M$   
kompaktnosti

$M$  je onda model i teorije  $T \Rightarrow M$  je neki skup kardinalnosti najviše  $\kappa$

Međutim, ovo je u kontradikciji sa aksiomama  $C_i \neq C_j$  za  $i \neq j$

Pretpostavimo suprotno da takvo  $n$  ne postoji  $\Rightarrow$  za svako  $n \in \mathbb{N}$  postoji  $m \in \mathbb{N}$   $m \geq n$  tako da u ovoj klasi postoji grupa  $G_m$  t.d.j.  $|G_m| = m$

Neka je  $T$  teorija koja aksiomatizuje  $\mathbb{C}$

$$L' = L \cup \{C_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

$$T' = T \cup \{C_i \neq C_j \mid i \neq j\}$$

Neka je  $T''$  neka konačna podteorija od  $T'$

Neka se u  $T''$  javljaju  $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}$

Uzmimo kao model od  $T''$  neku  $G_m$  za

$$m \geq n \quad |G_m| = m \quad \Rightarrow T' \text{ ima model } M$$

$\Rightarrow M$  je neka konačna Abelova grupa sa prebrojivo mnogo elemenata  $\nless$

$\in$  ekvivalencija na  $\mathbb{N}$

$$u \sim v \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor$$

a)  $\text{dcl}(\emptyset) = ?$        $\text{dcl}(\{x\}) = ?$

b) Ispitati da li je skup  $2\mathbb{N}$  definabilan sa parametrima?

$$C_0 = \{0, 1\}$$

$$C_1 = \{2, 3\}$$

$$\vdots$$
$$C_n = \{2n, 2n+1\}$$

Posmatrajmo automorfizam

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$2n \mapsto 2n+1$$

$$2n+1 \mapsto 2n$$

koji ne fiksira ništa

$$\Rightarrow \text{dcl}(\emptyset) = \emptyset$$

$x \in 0 \wedge \neg(x=0)$  je formula koja

definiše  $1 \Rightarrow \{0, 1\} \subseteq \text{dcl}(\{x\})$

Dokazujemo  $\text{dcl}(\{x\}) \subseteq \{0, 1\}$

Definišimo automorfizam  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f: \begin{array}{l} 2n \mapsto 2n+1 \\ 2n+1 \mapsto 2n \end{array}$$

za ostale  
elemente

Pps da je ovaj skup definabilan sa parametrima  $a_1, a_2, \dots, a_n$

Neka je  $C_m$  klasa u kojoj se ne nalazi nijedan parametar

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$C_m = \{2m, 2m+1\}$$

$$2m \mapsto 2m+1$$

$$2m+1 \mapsto 2m$$

ostale elemente  
fiksira ( $n \mapsto n$ )

$f$  je automorfizam  
koji fiksira  $a_1, \dots, a_n$

$$f(2\mathbb{N}) \neq 2\mathbb{N}$$

jer  
 $f(2m) = 2m+1$

$\Rightarrow$  ovaj skup nije definabilan sa parametrima

$$\left\{ \neg(\exists x_1)(\exists x_2) \dots (\exists x_n) (g(x_1, x_2) \wedge g(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge g(x_{n-1}, x_n) \wedge g(x_n, x_1)) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \right\}$$

aksiomatizuje acikličke grafove