Алгебра 2(МВ)– вежбе

Никола Лелас

Садржај

1 Решиве групе

Дефиниција 1.1. Нека је G група и $x, y \in G$. Комутатор елемената x и y, у ознаци $[x, y]$ је дефинисан са

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Дефиниција 1.2. Подгрупа групе G генерисана комутаторима свих елемената из G се назива извод групе G и означава се G'.

Пример 1.3. Нека је G Абелова група. Тада сви елементи из G међусобно комутирају, па за све $x, y \in G$ важи

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = xx^{-1}yy^{-1} = e.$$

Одатле закључујемо да је $G' = \langle e \rangle$.
□

Задатак 1. Одредити извод симетричне групе $\mathbb{S}_n$, $n \geq 3$.

Решење. Приметимо прво да је за произвољне $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_n$ испуњено

$$\operatorname{sgn}[\pi, \sigma] = \operatorname{sgn}\left(\pi\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}\right) = 1.$$

Како су производи и инверзи парних пермутација поново парне пермутације, закључујемо да је $\mathbb{S}_n' \subseteq \mathbb{A}_n$.

Покажимо да важи и обратна инклузија $\mathbb{A}_n \subseteq \mathbb{S}_n'$. Пошто 3-циклови генеришу $\mathbb{A}_n$, довољно је да покажемо да се произвољни 3-цикл може представити преко комутатора неких елемената из $\mathbb{S}_n$. Заиста, за произвољни 3-цикл $\lceil a, b, c \rfloor$ имамо:

$$\begin{aligned}
\lceil a, b, c \rfloor &= \lceil a, b \rfloor \lceil b, c \rfloor \\
&= \lceil a, b \rfloor \lceil a, c \rfloor \lceil a, b \rfloor \lceil a, c \rfloor \\
&= \lceil a, b \rfloor \lceil a, c \rfloor \lceil a, b \rfloor^{-1} \lceil a, c \rfloor^{-1} \\
&= \left[\lceil a, b \rfloor, \lceil a, c \rfloor\right].
\end{aligned}$$

Према томе, добијамо $\mathbb{S}_n' = \mathbb{A}_n$.
□

Задатак 2. Одредити извод алтернирајуће групе $\mathbb{A}_n$, $n \geq 5$.

Решење. Свакако имамо да је $\mathbb{A}_n' \subseteq \mathbb{A}_n$. Докажимо да важи обратна инклузија. Слично као у претходном задатку, довољно је да произвољни 3-цикл представимо преко комутатора неких пермутација. Једина разлика је што сада те пермутације морају бити парне, па представљање из претходног задатка не можемо директно да искористимо.

Уочимо произвољни 3-цикл $\lceil a, b, c \rfloor$. Пошто је $n \geq 5$, постоје $d, e \notin \{a, b, c\}$ такви да је $d \neq e$. Означимо:

$$f = \lceil a, b \rfloor \lceil d, e \rfloor \quad \text{и} \quad g = \lceil a, c \rfloor \lceil d, e \rfloor.$$

Приметимо да су пермутације f и g парне, као и да важи

$$\begin{aligned}[f,g] &= \lceil a,b\rfloor\lceil d,e\rfloor\lceil a,c\rfloor\lceil d,e\rfloor\lceil a,b\rfloor\lceil d,e\rfloor\lceil a,c\rfloor\lceil d,e\rfloor \\ &= \lceil a,b\rfloor\lceil a,c\rfloor\lceil a,b\rfloor^{-1}\lceil a,c\rfloor^{-1} \\ &= [\lceil a,b\rfloor,\lceil a,c\rfloor] \\ &= \lceil a,b,c\rfloor.\end{aligned}$$

Добијамо $\mathbb{A}_n \subseteq \mathbb{A}_n'$, што даје $\mathbb{A}_n' = \mathbb{A}_n$.
□

Напомена. Приметимо да је при решавању претходног задатка био кључан услов $n \geq 5$. Наравно, у случајевима $n = 2$ и $n = 3$ је група $\mathbb{A}_n$ Абелова, па одмах користећи Пример 1.3 добијамо $\mathbb{A}_n' = \langle e\rangle$. Зато нам остаје само нетривијалан случај $n = 4$ којим ћемо се позабавити мало касније.

Задатак 3. Одредити извод диедарске групе $\mathbb{D}_n$, $n \geq 3$.

Решење. Одредимо за почетак комутаторе произвољних елемената из $\mathbb{D}_n$. Како ти елементи могу бити ротације и рефлексије издвајамо следеће случајеве:

- Комутатор две ротације ρ^i и ρ^j:

$$\left[\rho^i,\rho^j\right] = \rho^i\rho^j\rho^{-i}\rho^{-j} = \varepsilon$$

- Комутатор ротације ρ^i и рефлексије $\sigma\rho^j$:

$$\left[\rho^i,\sigma\rho^j\right] = \rho^i\sigma\rho^j\rho^{-i}\rho^{-j}\sigma = \rho^i\sigma\rho^{-i}\sigma = \rho^i\rho^i\sigma\sigma = \rho^{2i} \in \langle\rho^2\rangle. \tag{1}$$

- Комутатор две рефлексије $\sigma\rho^i$ и $\sigma\rho^j$:

$$\left[\sigma\rho^i,\sigma\rho^j\right] = \sigma\rho^i\sigma\rho^j\rho^{-i}\sigma\rho^{-j}\sigma = \rho^{-i}\rho^{j-i}\rho^j = \rho^{2(j-i)} \in \langle\rho^2\rangle.$$

Закључујемо да су комутатори произвољних елемената из $\mathbb{D}_n$ садржани у подгрупи $\langle\rho^2\rangle$, па је $\mathbb{D}_n' \subseteq \langle\rho^2\rangle$. Са друге стране, из (1) имамо $\rho^2 = [\rho,\sigma]$, што даје обратну инклузију $\langle\rho^2\rangle \subseteq \mathbb{D}_n'$. Према томе, $\mathbb{D}_n' = \langle\rho^2\rangle$. Приметимо још и да за непарно n важи $\langle\rho^2\rangle = \langle\rho\rangle$, па добијамо и мало прецизније

$$\mathbb{D}_n' = \begin{cases} \langle\rho\rangle, & \text{ако је } n \text{ непарно} \\ \langle\rho^2\rangle, & \text{ако је } n \text{ парно.}\end{cases}$$

□

Задатак 4. Одредити извод групе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Решење. За произвољне матрице $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ важи

$$\det[A,B] = \det(ABA^{-1}B^{-1}) = 1.$$

Одатле закључујемо да је $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})' \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Покажимо још и обратну инклузију.

За почетак, уочимо произвољну матрицу $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Детерминанта посматране матрције је једнака 1, па важи $ad - bc = 1$.

Ако је $a \neq 0$, важи

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ab \\ \frac{c}{a} & ad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}.$$

Ослањајући се на услов $ad - bc = 1$, даље добијамо

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & ab \\ \frac{c}{a} & bc+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ако је $a = 0$, онда мора бити $b \neq 0$ и важи $bc = -1$. Сличо као за $a \neq 0$ у овом случај имамо

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{d}{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Према томе, да бисмо показали да је $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})'$, довољно је да произвољне матрице $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ за $x \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$ за $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ изразимо преко комутатора елемената из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Имамо прво

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 2x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а транспоновањем претходног рачуна добијамо и израз за $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$.

Даље се слично показује да важи

$$\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

и

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1},$$

што завршава задатак уз закључак $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})' = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
□

Задатак 5. Нека је H подгрупа групе G. Тада H садржи комутаторе свих $g_1, g_2 \in G$ ако и само ако је $H \triangleleft G$ и G/H Абелова група.

Решење. Претпоставимо да H садржи комутаторе произвољних елемената из G. Покажимо прво да је $H \triangleleft G$. Пошто је H подгрупа од G, довољно је да покажемо да је она инваријантна у односу на конјугацију произвољним елементима из G. Уочимо произвољно $x \in H$ и $g \in G$. Тада је

$$gxg^{-1} = gxg^{-1}x^{-1}x = \underbrace{[g,x]}_{\in H}\underbrace{x}_{\in H} \in H,$$

одакле следи $H \triangleleft G$. Остаје још да покажемо да је група G/H Абелова. Уочимо произвољна два косета g_1H и g_2H из G/H. Њихов комутатор је

$$[g_1H, g_2H] = g_1Hg_2H(g_1H)^{-1}(g_2H)^{-1} = g_1Hg_2Hg_1^{-1}Hg_2^{-1}H = [g_1,g_2]H = H,$$

јер је $[g_1, g_2] \in H$. Закључујемо да g_1H и g_2H комутирају, па је због њихове произвољности група G/H Абелова.

Нека је сада $H \triangleleft G$ и G/H Абелова група. Тада за свака два косета g_1H и g_2H важи

$$[g_1H, g_2H] = H.$$

Пошто, као што смо већ видели, важи $[g_1H, g_2H] = [g_1, g_2]H$, закључујемо да је

$$[g_1, g_2]H = H.$$

Према томе, за произвољне елементе g_1 и g_2 из G важи $[g_1, g_2] \in H$.
□

Како је, по дефиницији, извод групе G једна њена подгрупа која садржи све комутаторе елемената из G, одмах добијамо следећу последицу.

Последица. Нека је G група. Тада је $G' \triangleleft G$ и G/G' Абелова група.

Дефиниција 1.4. Количничка група G/G' се назива абелизација групе G и означава се са G^{ab}.

Пример 1.5. За $n \geq 3$, из Задатка 1 имамо да је $\mathbb{S}_n' = \mathbb{A}_n$. Како је $[\mathbb{S}_n : \mathbb{A}_n] = 2$, добијамо

$$\mathbb{S}_n^{\mathrm{ab}} = \mathbb{S}_n/\mathbb{A}_n \cong \mathbb{Z}_2.$$

Слично, за $n \geq 5$, из Задатка 2 имамо да је $\mathbb{S}_n' = \mathbb{A}_n$, па је

$$\mathbb{A}_n^{\mathrm{ab}} = \langle \varepsilon \rangle.$$

□

Пример 1.6. Из Задатка 4 имамо да је $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})' = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Зато је

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^{\mathrm{ab}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\times},$$

користећи Прву теорему о изоморфизму група.
□

Задатак 6. Одредити извод групе $\mathbb{A}_4$.

Решење. Посматрајмо подскуп

$$V = \left\{ \varepsilon, \underbrace{\lceil 1,2 \rfloor \lceil 3,4 \rfloor}_{f}, \underbrace{\lceil 1,3 \rfloor \lceil 2,4 \rfloor}_{g}, \underbrace{\lceil 1,4 \rfloor \lceil 2,3 \rfloor}_{h} \right\}$$

групе $\mathbb{A}_4$. Приметимо, да су осим неутрала ε, сви елементи из V реда 2, као и да важи

$$fg = gf = h, gh = hg = f \text{ и } hf = fh = g.$$

Због тога је V подгрупа од $\mathbb{A}_4$. Пошто се конјугацијом не мења облик цикличне декомпозиције пермутације и f, g и h су (једине) дупле транспозиције из $\mathbb{A}_4$, важи да је та подгрупа нормална. Приметимо и да је

$$[\mathbb{A}_4 : V] = \frac{|\mathbb{A}_4|}{|V|} = \frac{12}{4} = 3,$$

па је $\mathbb{A}_4/V \cong \mathbb{Z}_3$. Дакле, важи $V \triangleleft \mathbb{A}_4$ и $\mathbb{A}_4/V$ је Абелова група. На основу Задатка 5 онда следи $\mathbb{A}_4' \subseteq V$.

Са друге стране, група $\mathbb{A}_4$ је неабелова, па је $\mathbb{A}_4' \neq \langle \varepsilon \rangle$. То значи да постоји барем једна нетривијална пермутација у $\mathbb{A}_4'$. Како је $\mathbb{A}_4' \subseteq V$, та пермутација мора бити дупла транспозиција. Међутим, $\mathbb{A}_4' \triangleleft \mathbb{A}_4$, па се у $\mathbb{A}_4'$ морају налазити и сви конјугати те дупле транспозиције, што су управо све преостале дупле транспозиције из $\mathbb{A}_4$. Одатле закључујемо да је $\mathbb{A}_4' = V$.
□

Напомена. Приметимо да је група V Абелова, изоморфна Клајновој групи, $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Изводе вишег реда групе G дефинишемо индуктивно са $G'' = (G')'$, $G''' = (G'')'$ и генерално,

$$G^{(n+1)} = \left(G^{(n)}\right)' \quad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

На овај начин добијамо низ нормалних подгрупа

$$G \triangleright G' \triangleright G'' \triangleright \ldots G^{(n)} \triangleright \ldots \tag{2}$$

Дефиниција 1.7. Ако постоји (најмањи) природан број n такав да за низ (2) важи

$$G \triangleright G' \triangleright G'' \triangleright \ldots G^{(n)} = \langle e \rangle$$

за групу G се каже да је решива. У супротном, за групу се G каже да није решива.

Пример 1.8. Нека је $n \geq 5$. На основу Задатака 1 и 2 имамо да су низови извода за $\mathbb{S}_n$ и $\mathbb{A}_n$ редом

$$\mathbb{S}_n \triangleright \mathbb{A}_n \triangleright \mathbb{A}_n \triangleright \mathbb{A}_n \triangleright \ldots$$
$$\mathbb{A}_n \triangleright \mathbb{A}_n \triangleright \mathbb{A}_n \triangleright \mathbb{A}_n \triangleright \ldots$$

Због тога групе $\mathbb{S}_n$ и $\mathbb{A}_n$ нису решиве.

Слично, за $n = 4$ се ослањамо још на Задатак 6 и Пример 1.3 да добијемо низове извода за $\mathbb{S}_4$ и $\mathbb{A}_4$:

$$\mathbb{S}_4 \triangleright \mathbb{A}_4 \triangleright V \triangleright \langle e \rangle$$
$$\mathbb{A}_4 \triangleright V \triangleright \langle e \rangle.$$

Такође, низ извода групе $\mathbb{S}_3$ је $\mathbb{S}_3 \triangleright \mathbb{A}_3 \triangleright \langle e \rangle$, а за $\mathbb{A}_3$, $\mathbb{S}_2$ и $\mathbb{A}_2$ се одмах тривијално завршава неутралом, пошто су те групе Абелове. Дакле, групе $\mathbb{S}_4$, $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{S}_2$, $\mathbb{A}_4$, $\mathbb{A}_3$ и $\mathbb{A}_2$ су решиве.

Да сумирамо, групе $\mathbb{S}_n$ и $\mathbb{A}_n$ су решиве ако и само ако је $n \leq 4$.

□

Пример 1.9. Нека је $n \geq 3$. На основу Задатка 3 и Примера 1.3 имамо да је низ извода за $\mathbb{D}_n$

$$\mathbb{D}_n \triangleright \langle \rho^2 \rangle \triangleright \langle e \rangle.$$

Закључујемо да су групе $\mathbb{D}_n$ решиве.

□

Овај одељак завршавамо једном теоремом која је често корисна за показивање да је нека група решива.

Теорема 1.10. Група G је решива ако и само ако постоји $H \triangleleft G$ таква да су H и G/H решиве групе.

2 Дејства група

Дефиниција 2.1. Дејство групе G на скуп S је пресликавање $\cdot : G \times S \to S$ са особинама:

- $e \cdot x = x$ за све $x \in S$.
- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ за све $g, h \in G$ и $x \in S$.

Имамо и еквивалентну дефиницију: Дејство групе G на скуп S је хомоморфизам из G у групу $\operatorname{Sym} S$, где је

$$\operatorname{Sym} S = \{f : S \to S \mid f \text{ је бијекција}\}.$$

Уз дејство групе G на скуп S дефинишемо следеће скупове:

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \quad \text{орбита елемента } x \in S.$$
$$\operatorname{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \quad \text{стабилизатор елемента } x \in S.$$
$$\operatorname{Fix}(g) = \{x \in S \mid g \cdot x = x\} \text{ фиксни скуп елемента } g \in G.$$

Скуп свих орбита означавамо са S/G.

Задатак 7. Нека је $n \geq 2$ природан број. Означимо са G симетричну групу $\mathbb{S}_n$ и са S скуп свих реалних полинома са n неодређених, $S = \{f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \mid f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \ldots, X_n]\}$. Доказати да је са

$$\sigma \cdot f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}),\ \ \sigma \in G, f \in S$$

дефинисано једно дејство групе G на скуп S. Одредити орбите елемената X_1 и $X_1 + X_2$, стабилизатор за X_n, као и фиксни скуп за $\lceil 1, 2 \rfloor$ при овом дејству.

Решење. Прво треба доказати да је $\cdot$ дејство, што радимо по дефиницији. За произвољно f из S имамо

$$\varepsilon \cdot f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(X_{\varepsilon(1)}, X_{\varepsilon(2)}, \ldots, X_{\varepsilon(n)}) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

јер за ε, пошто је неутрални елемент у групи G, важи $\varepsilon(i) = i$ за све $1 \leq i \leq n$. Даље, за произвољне π и σ из G важи:

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \pi) \cdot f(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= f\left(X_{(\sigma\circ\pi)(1)}, X_{(\sigma\circ\pi)(2)}, \ldots, X_{(\sigma\circ\pi)(n)}\right) \\ &= f\left(X_{\sigma(\pi(1))}, X_{\sigma(\pi(2))}, \ldots, X_{\sigma(\pi(n))}\right) \\ &= \sigma \cdot f(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \ldots, X_{\pi(n)}) \\ &= \sigma \cdot (\pi \cdot f(X_1, X_2, \ldots, X_n)).\end{aligned}$$

Овим смо показали да је $\cdot$ дејство.

Остаје још да одредимо тражене скупове. То радимо по дефиницији. Прво за орбиту елемента X_1 имамо

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{X_1} &= \{\sigma \cdot X_1 \mid \sigma \in G\} \\ &= \left\{X_{\sigma(1)} \mid \sigma \in G\right\} \\ &= \{X_1, X_2, \ldots, X_n\},\end{aligned}$$

јер када пермутација σ пролази целом групом $G = \mathbb{S}_n$, $\sigma(1)$ узима све вредности из скупа $\{1, 2 \ldots, n\}$.

За орбиту елемента $X_1 + X_2$ имамо

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{X_1+X_2} &= \{\sigma \cdot (X_1 + X_2) \mid \sigma \in G\} \\ &= \left\{X_{\sigma(1)} + X_{\sigma(2)} \mid \sigma \in G\right\} \\ &= \{X_i + X_j \mid 1 \leq i < j \leq n\},\end{aligned}$$

пошто, исто као у претходном примеру, $\sigma(1)$ и $\sigma(2)$ пролазе целим скупом $\{1, 2 \ldots, n\}$, али не могу бити једнаки због чињенице да је σ бијекција.

Директно из дефиниције, за стабилизатор елемента X_n добијамо

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}(X_n) &= \{\sigma \in G \mid \sigma \cdot X_n = X_n\} \\ &= \{\sigma \in G \mid X_{\sigma(n)} = X_n\} \\ &= \{\sigma \in G \mid \sigma(n) = n\}.\end{aligned}$$

Коначно, фиксни скуп за транспозицију $\lceil 1,2\rfloor$ је

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}(\lceil 1,2\rfloor) &= \{f(X_1,X_2,\ldots,X_n)\in S \mid \lceil 1,2\rfloor\cdot f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = f(X_1,X_2,\ldots,X_n)\}\\ &= \{f(X_1,X_2,\ldots,X_n)\in S \mid f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = f(X_2,X_1,\ldots,X_n)\}.\end{aligned}$$

□

Задатак 8. Посматрајмо групу $G=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix} \mid a,b,d\in\mathbb{R}, ad=1\right\}$ у односу на уобичајено множење матрица. Доказати да је са

$$\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}\cdot z = \frac{az+b}{d},\ \begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}\in G, z\in\mathbb{C}$$

дефинисано једно дејство групе G на скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$. Одредити орбиту и стабилизатор за елемент $i\in\mathbb{C}$ при овом дејству.

Решење. За произвољне матрице $\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}e & f\\ 0 & h\end{bmatrix}$ из G и $z\in\mathbb{C}$ имамо:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot z &= \frac{1\cdot z+0}{1} = z,\\ \begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}e & f\\ 0 & h\end{bmatrix}\cdot z\right) &= \begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}\cdot\frac{ez+f}{h}\\ &= \frac{a\frac{ez+f}{h}+b}{d}\\ &= \frac{aez+af+bh}{dh}\\ &= \begin{bmatrix}ae & af+bh\\ 0 & dh\end{bmatrix}\cdot z\\ &= \left(\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\ 0 & h\end{bmatrix}\right)\cdot z.\end{aligned}$$

Добијено показује да је $\cdot$ дејство. Сада је по дефиницији:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_i &= \left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}\cdot i \,\middle|\, \begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}\in G\right\}\\ &= \left\{\frac{ai+b}{d} \mid a,b,d\in\mathbb{R}, ad=1\right\}\\ &= \left\{a^2i+ab \mid a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0\right\}\\ &= \{z\in\mathbb{C} \mid \Im(z)>0\}.\end{aligned}$$

Слично, за стабилизатор имамо:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}(i) &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in G \,\middle|\, \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot i = i \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in G \,\middle|\, \frac{ai+b}{d} = i \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in G \,\middle|\, \frac{a}{d} = 1, b = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in G \,\middle|\, a = d \right\} \\
&= \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ (пошто имамо и услов } ad = 1 \text{ за матрице из } G).
\end{aligned}$$

□

Задатак 9. Посматрајмо подгрупу G групе $\mathbb{S}_8$ генерисану пермутацијама $\lceil 1,2,3\rfloor\lceil 7,8\rfloor$ и $\lceil 4,5\rfloor$ која дејствује на скуп $S = \{1,2,\ldots,8\}$ као група пермутација,

$$\sigma \cdot n = \sigma(n), \;\; \sigma \in G, n \in S.$$

Одредити $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_6, \mathcal{O}_7$, $\mathrm{Stab}(2), \mathrm{Stab}(4)$, као и $\mathrm{Fix}(\lceil 4,5\rfloor)$ и $\mathrm{Fix}(\lceil 1,2,3\rfloor\lceil 7,8\rfloor)$ при овом дејству.

Решење. Прво можемо одредити све елементе групе G,

$$\begin{aligned}
G = \{&\varepsilon, \lceil 1,2,3\rfloor\lceil 7,8\rfloor, \lceil 1,3,2\rfloor, \lceil 7,8\rfloor, \lceil 1,2,3\rfloor, \lceil 1,3,2\rfloor\lceil 7,8\rfloor, \\
&\lceil 4,5\rfloor, \lceil 1,2,3\rfloor\lceil 4,5\rfloor\lceil 7,8\rfloor, \lceil 1,3,2\rfloor\lceil 4,5\rfloor, \lceil 4,5\rfloor\lceil 7,8\rfloor, \lceil 1,2,3\rfloor\lceil 4,5\rfloor, \lceil 1,3,2\rfloor\lceil 4,5\rfloor\lceil 7,8\rfloor\}.
\end{aligned}$$

Сада по дефиницији имамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= \{\sigma \cdot 1 \mid \sigma \in G\} \\
&= \{\sigma(1) \mid \sigma \in G\} \\
&= \{1,2,3\}.
\end{aligned}$$

Слично је онда

$$\mathcal{O}_6 = \{6\} \quad \text{и} \quad \mathcal{O}_7 = \{7,8\}.$$

Даље за стабилизаторе имамо

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}(2) &= \{\sigma \in G \mid \sigma \cdot 2 = 2\} \\
&= \{\sigma \in G \mid \sigma(2) = 2\} \\
&= \{\varepsilon, \lceil 7,8\rfloor, \lceil 4,5\rfloor, \lceil 4,5\rfloor\lceil 7,8\rfloor\} \\
&= \langle \lceil 4,5\rfloor, \lceil 7,8\rfloor \rangle,
\end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}(4) &= \{\varepsilon, \lceil 1,2,3\rfloor\lceil 7,8\rfloor, \lceil 1,3,2\rfloor, \lceil 7,8\rfloor, \lceil 1,2,3\rfloor, \lceil 1,3,2\rfloor\lceil 7,8\rfloor\} \\
&= \langle \lceil 1,2,3\rfloor\lceil 7,8\rfloor \rangle.
\end{aligned}$$

Коначно за фиксне скупове имамо

$$\mathrm{Fix}(\lceil 4,5\rfloor) = \{n \in S \mid \lceil 4,5\rfloor \cdot n = n\} = \{1,2,3,6,7,8\}$$

и

$$\mathrm{Fix}(\lceil 1,2,3\rfloor\lceil 7,8\rfloor) = \{4,5,6\}.$$

□

Дефиниција 2.2. Дејство групе G на скуп S је транзитивно ако при њему постоји само једна орбита, тј. ако за све $x, y \in S$ постоји $g \in G$ такво да је $y = g \cdot x$.

Пример 2.3. Нека је G група. Тада можемо посматрати дејство те групе левим множењем на њу саму дефинисано са

$$g \cdot x = gx, \;\; g, x \in G.$$

Како за све $x, y \in G$ важи $y = (yx^{-1}) \cdot x$, ово дејство је тразитивно.
□

Дефиниција 2.4. Нека група G_1 дејствује на скуп X_1 и група G_2 дејствује на скуп X_2. Тада је са

$$(g_1, g_2) \cdot (x_1, x_2) = (g_1 \cdot x_1, g_2 \cdot x_2), \;\; g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$$

дефинисано дејство групе $G_1 \times G_2$ на Декартов производ $X_1 \times X_2$ које се назива производ дејство.

Дефиниција 2.5. Нека је G група која дејствује на скупове X и Y. Тада је са

$$g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y), \;\; g \in G, x \in X, y \in Y$$

дефинисано једно дејство групе G на Декартов производ $X \times Y$ које се назива дијагонално дејство.

Задатак 10. Одредити стабилизатор за $(x, y) \in X \times Y$ при дијагоналном дејству групе G на скуп $X \times Y$.

Решење. Рачунамо директно по дефиницији:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}(x,y) &= \{g \in G \mid g \cdot (x,y) = (x,y)\} \\
&= \{g \in G \mid (g \cdot x, g \cdot y) = (x,y)\} \\
&= \{g \in G \mid g \cdot x = x, g \cdot y = y\} \\
&= \{g \in G \mid g \in \mathrm{Stab}(x), g \in \mathrm{Stab}(y)\} \\
&= \mathrm{Stab}(x) \cap \mathrm{Stab}(y).
\end{aligned}$$

□

Задатак 11. Показати да иако група G дејствује транзитивно на скупове X и Y, њено дијагонално дејство на скуп $X \times Y$ не мора бити транзитивно.

Решење. Посматрајмо дејство групе $\mathbb{Z}_2$ на саму себе сабирањем

$$x \cdot y = x +_2 y, \;\; x, y \in \mathbb{Z}_2.$$

Како смо видели у Примеру 2.3, ово дејство је транзитивно. Међутим, при одговарајућем дијагоналном дејству имамо две орбите

$$\mathcal{O}_{(0,0)} = \mathcal{O}_{(1,1)} = \{0 \cdot (0,0), 1 \cdot (0,0)\} = \{(0,0), (1,1)\}$$
$$\mathcal{O}_{(1,0)} = \mathcal{O}_{(0,1)} = \{0 \cdot (1,0), 1 \cdot (1,0)\} = \{(1,0), (0,1)\},$$

па то дејство није транзитивно.
□

Нека је $\cdot$ дејство групе G на скуп S. Тада је за произвољне $x, y \in S$ са $x \sim y$ ако и само ако постоји $g \in G$ такво да је $y = g \cdot x$ дефинисана једна релација на S. Штавише, та релација је релација еквиваленције, чије су класе орбите при дејству које посматрамо. Одатле закључујемо да скуп свих орбита чини једну партицију скупа S. Ако је T једна трансверзала те партиције (то је скуп који садржи тачно по једног представника сваке класе тј. орбите), онда из претходног закључка имамо:

$$\sum_{x \in T} |\mathcal{O}_x| = |S| \quad \text{(класна једначина)}.$$

Тврђење 2.6 (Теорема о орбити и стабилизатору)**.** Нека је G група која дејствује на скуп S. Тада за свако $x \in S$ важи:

- $\mathrm{Stab}(x)$ је подгрупа од G.
- $[G : \mathrm{Stab}(x)] = |\mathcal{O}_x|$.
- Ако је G коначна група, онда је $|G| = |\mathrm{Stab}(x)||\mathcal{O}_x|$.

Тврђење 2.7 (Бернсајдова лема)**.** Нека је G коначна група која дејствује на коначан скуп S. Тада важи:

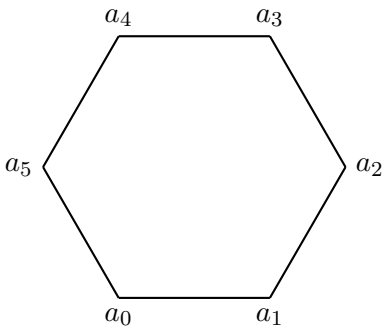
$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\,\mathrm{Fix}(g)|.$$

Задатак 12. Одредити на колико начина се могу обојити темена правилног шестоугла са n боја ако су два бојења иста када се једног од другог може добити:
а) ротацијом шестоугла.
б) произвољном симетријом шестоугла.

Решење. а) Нека је S скуп свих могућих бојења темена шестоугла. Тада можемо записати:

$$S = \{(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid 1 \leq a_i \leq n\},$$

при чему $a_i = k$ значи да је i-то теме обојено k-том бојом. Приметимо да је $|S| = n^6$. Ситауацију можемо представити и шестоуглом на слици:



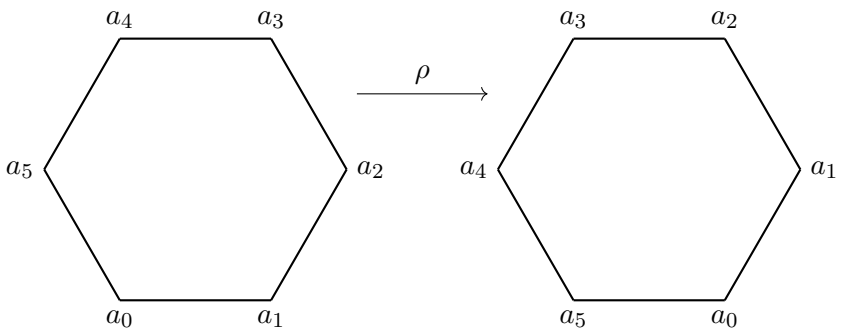
Подгрупа свих ротација $\langle\rho\rangle$ групе $\mathbb{D}_6$ дејствује на скуп S ротирајући темена шестоугла. При томе су два бојења иста ако и само ако се налазе у истој орбити при овом дејству. Дакле, треба да израчунамо број орбита $|S/\langle\rho\rangle|$. Из Бернсајдове леме је

$$\begin{aligned}|S/\langle\rho\rangle| &= \frac{1}{|\langle\rho\rangle|}\sum_{g\in\langle\rho\rangle}|\operatorname{Fix}(g)| \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{5}\left|\operatorname{Fix}(\rho^i)\right|.\end{aligned}$$

Све што је још потребно да урадимо је да израчунамо колико се елемената налази у фиксним скуповима које смо добили.

За $i = 0$ имамо да је $\rho^i = \varepsilon$, па сви елементи скупа S остају фиксирани. Дакле, $|\operatorname{Fix}(\varepsilon)| = n^6$.

За $i = 1$ имамо елемент ρ који представља ротацију за $60°$ око центра шестоугла у смеру супротном од смера кретања казаљке на сату. Његово дејство можемо представити сликом испод. Бојења у фиксном скупу су она која при овом дејству остају



инваријантна. То значи да прва и друга слика морају бити исте, одакле добијамо услове

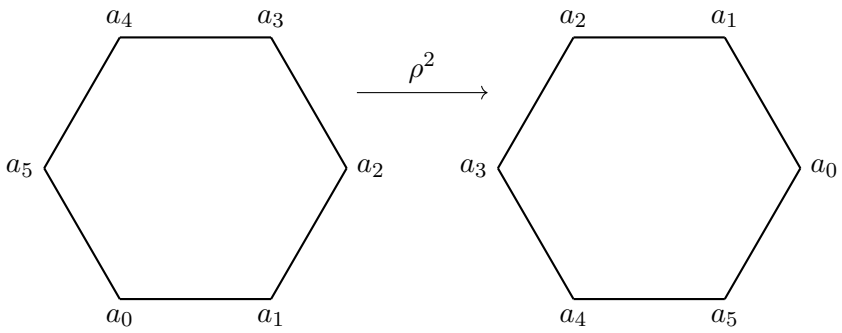
$$a_0 = a_5, a_1 = a_0, a_2 = a_1, a_3 = a_2, a_4 = a_3, a_5 = a_4.$$

Закључујемо да важи

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \alpha,\ \ 1 \leq \alpha \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\rho)| = n$.

Слично даље за $n = 2$, имамо дејство елемента ρ^2 кога представљамо сликом:



Из једнакости прве и друге слике добијамо услове

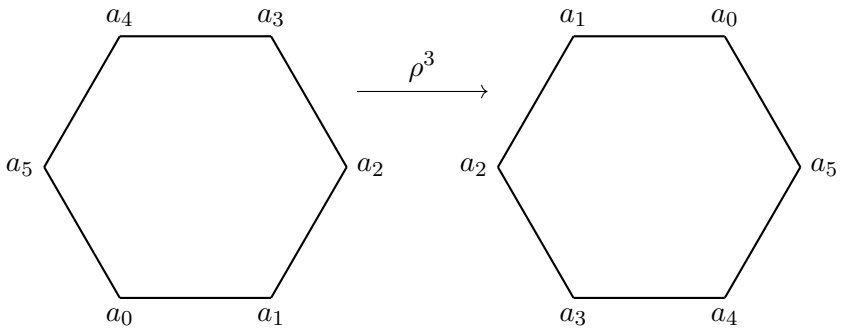
$$a_0 = a_4, a_1 = a_5, a_2 = a_0, a_3 = a_1, a_4 = a_2, a_5 = a_3.$$

Закључујемо да је

$$a_0 = a_2 = a_4 = \alpha,\ \ a_1 = a_3 = a_5 = \beta,\ \ 1 \leq \alpha, \beta \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\rho^2)| = n^2$.

За $n = 3$ је дејство елемента ρ^3 представљено сликом:



Из једнакости прве и друге слике добијамо услове

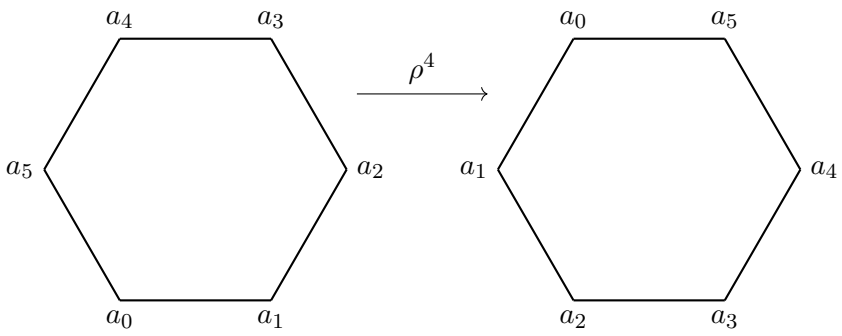
$$a_0 = a_3, a_1 = a_4, a_2 = a_5, a_3 = a_0, a_4 = a_1, a_5 = a_2.$$

Закључујемо да је

$$a_0 = a_3 = \alpha,\ \ a_1 = a_4 = \beta, a_2 = a_5 = \gamma\ \ 1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\rho^3)| = n^3$.

За $n = 4$ је дејство елемента ρ^4 представљено сликом:



Из једнакости прве и друге слике добијамо услове

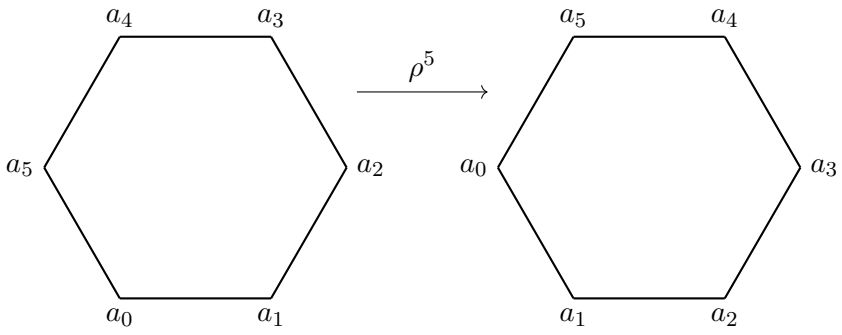
$$a_0 = a_2, a_1 = a_3, a_2 = a_4, a_3 = a_5, a_4 = a_0, a_5 = a_1.$$

Закључујемо да је

$$a_0 = a_2 = a_4 = \alpha,\ \ a_1 = a_3 = a_5 = \beta,\ \ 1 \leq \alpha, \beta \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\rho^4)| = n^2$.

Коначно за $n = 5$ је дејство елемента ρ^5 представљено сликом:



Из једнакости прве и друге слике добијамо услове

$$a_0 = a_1, a_1 = a_2, a_2 = a_3, a_3 = a_4, a_4 = a_5, a_5 = a_0.$$

Закључујемо да важи

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \alpha,\ \ 1 \leq \alpha \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\rho^5)| = n$.

Када све сумирамо, добијамо да је број тражених бојења једнак

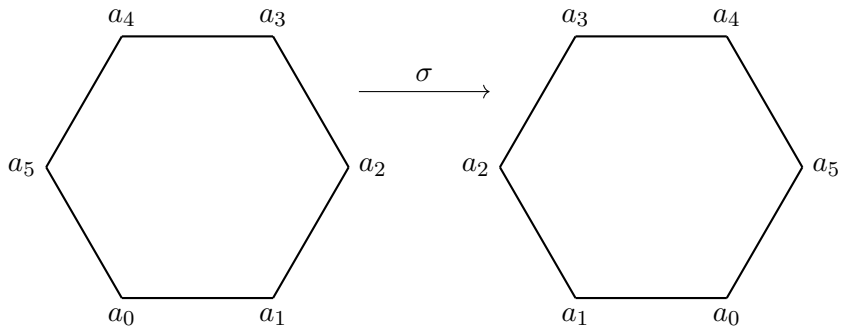
$$\frac{1}{6}\left(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n\right).$$

б) Све је исто као у делу а), само што сада уместо дејства подгрупе $\langle\rho\rangle$, посматрамо дејство целе групе $\mathbb{D}_6$. На основу Бернасајдове леме добијамо да је број тражених бојења једнак

$$\frac{1}{|\mathbb{D}_6|}\sum_{g\in\mathbb{D}_6}|\operatorname{Fix}(g)| = \frac{1}{12}\sum_{g\in\mathbb{D}_6}|\operatorname{Fix}(g)|.$$

Кардиналности фиксних скупова ротација смо већ одредили у делу а), па остаје само још да их одредимо за рефлексије.

Рефлексија σ је у односу на вертикалну осу шестоугла, па је њено дејство представљено сликом:

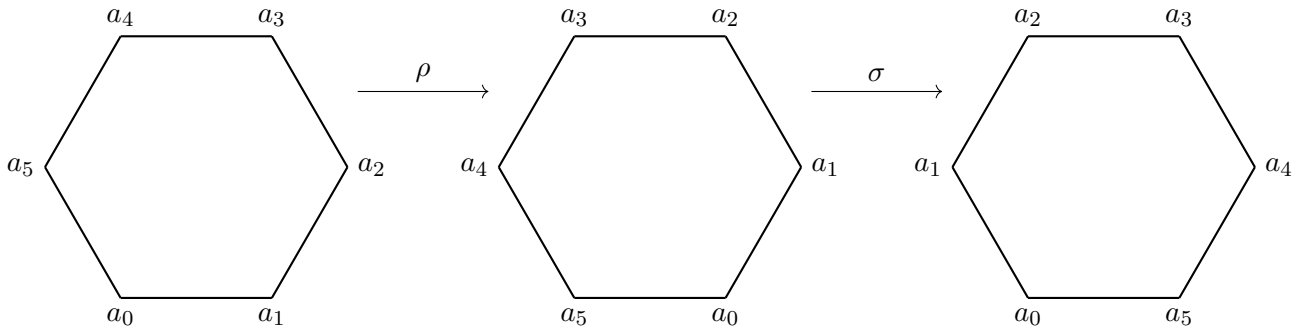


Из једнакости прве и друге слике закључујемо да важи

$$a_0 = a_1 = \alpha,\ \ a_2 = a_5 = \beta,\ \ a_3 = a_4 = \gamma,\ \ 1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\sigma)| = n^3$.

Дејство рефлексије $\sigma\rho$ је представљено сликом:

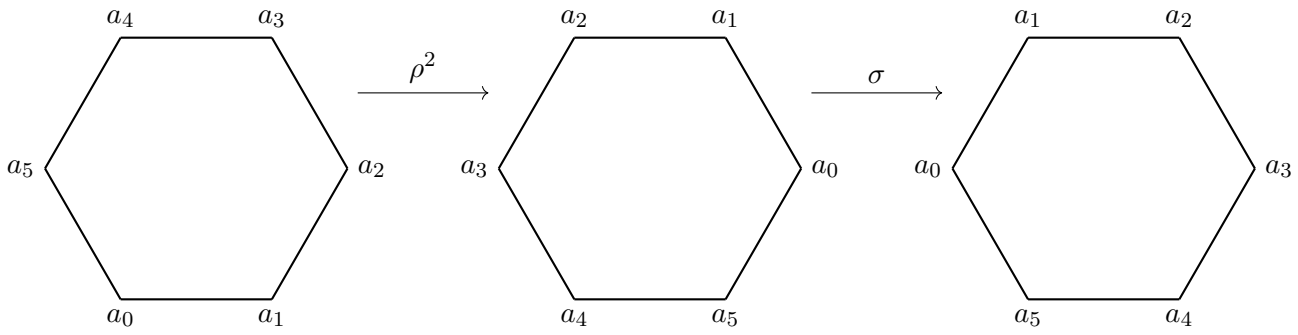


Из једнакости прве и *треће* слике закључујемо да важи

$$a_0 = \alpha,\ \ a_1 = a_5 = \beta,\ \ a_2 = a_4 = \gamma,\ \ a_3 = \delta,\ \ 1 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\sigma\rho)| = n^4$.

Дејство рефлексије $\sigma\rho^2$ је представљено сликом:

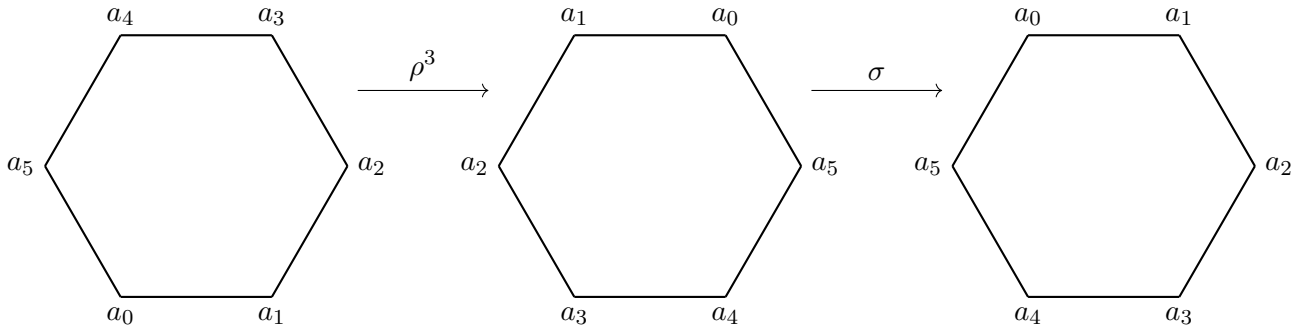


Из једнакости прве и треће слике закључујемо да важи

$$a_0 = a_5 = \alpha,\ \ a_1 = a_4 = \beta,\ \ a_2 = a_3 = \gamma,\ \ 1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\sigma\rho^2)| = n^3$.

Дејство рефлексије $\sigma\rho^3$ је представљено сликом:

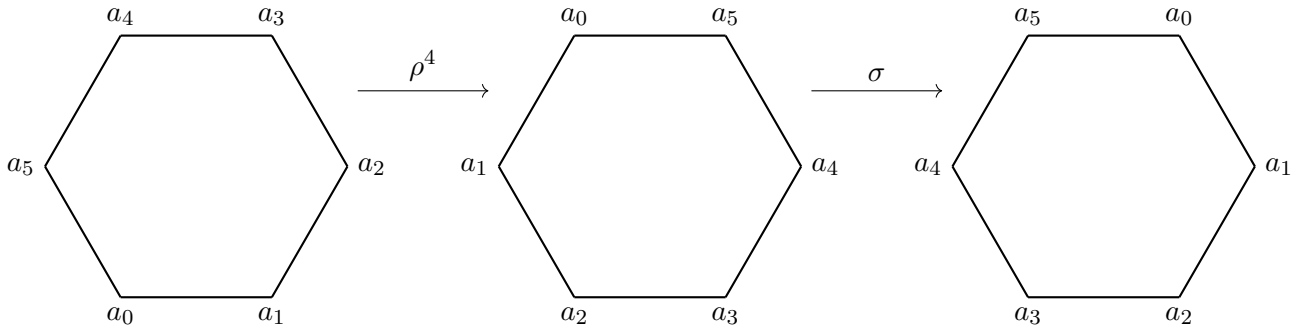


Из једнакости прве и треће слике закључујемо да важи

$$a_0 = a_4 = \alpha,\ \ a_1 = a_3 = \beta,\ \ a_2 = \gamma,\ \ a_5 = \delta,\ \ 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\sigma\rho^3)| = n^4$.

Дејство рефлексије $\sigma\rho^4$ је представљено сликом:

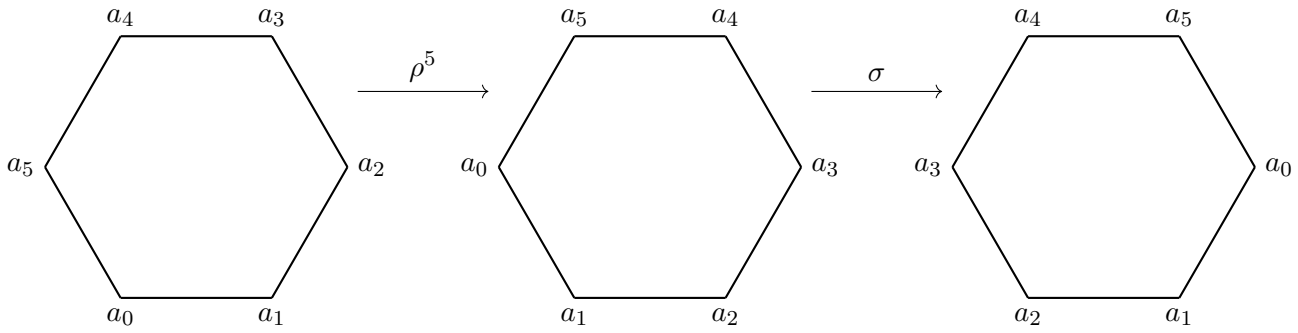


Из једнакости прве и треће слике закључујемо да важи

$$a_0 = a_3 = \alpha,\ \ a_1 = a_2 = \beta,\ \ a_4 = a_5 = \gamma,\ \ 1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\sigma\rho^4)| = n^3$.

Коначно, дејство рефлексије $\sigma\rho^5$ је представљено сликом:



Из једнакости прве и треће слике закључујемо да важи

$$a_0 = a_2 = \alpha,\ \ a_1 = \beta,\ \ a_3 = a_5 = \gamma,\ \ a_4 = \delta,\ \ 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq n,$$

па је $|\operatorname{Fix}(\sigma\rho^5)| = n^4$.

Када све сумирамо, добијамо да је број тражених бојења једнак

$$\frac{1}{12}\left(n^6 + 3n^4 + 4n^3 + 2n^2 + 2n\right).$$

□

Задатак 13. Нека је G коначна група која дејствује транзитивно на коначан скуп S, $|S| \geq 2$. Доказати да постоји $g \in G$ такво да је $\operatorname{Fix}(g) = \emptyset$.

Решење. Из Бернсајдове леме имамо

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|.$$

Како је дејство које посматрамо транзитивно, при њему је само једна орбита, па из претходног добијамо

$$|G| = \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|. \tag{3}$$

Ако би за све $g \in G$ било $\operatorname{Fix}(g) \neq \emptyset$, онда би сваки од сабирака са десне стране једнакости (3) био барем 1. Како је тих сабирака тачно $|G|$, то је могуће само ако су сви једнаки 1. Међутим, за $g = e$ имамо $\operatorname{Fix}(e) = S$, па је $|\operatorname{Fix}(e)| = |S| \geq 2$. Одатле закључујемо да је немогуће да за све $g \in G$ важи $\operatorname{Fix}(g) \neq \emptyset$, па постоји барем једно $g \in G$ такво да је $\operatorname{Fix}(g) = \emptyset$.
□

Задатак 14. Нека је G група реда 21 која дејствује на скуп X кардиналности 11. Доказати да постоји $x \in X$ такво да је $g \cdot x = x$ за све $g \in G$.

Решење. Претпоставимо супротно, нека за свако $x \in X$ постоји $g \in G$ такво да је $g \cdot x \neq x$. То значи да при овом дејству нема једночланих орбита. Из Теореме о орбити и стабилизатору следи да за све $x \in X$ важи:

$$|\mathcal{O}_x| \mid |G| \quad \text{тј.} \quad |\mathcal{O}_x| \mid 21.$$

Већ смо видели да орбите не могу бити једночлане, а пошто је свака орбита садржана у скупу X кардиналност 11, оне не могу имати ни 21 елемент. Закључујемо да орбите могу имати 3 или 7 елемената.

Из класне једначине добијамо даље

$$\sum_{x \in T} |\mathcal{O}_x| = |X| \quad \text{тј.} \quad \sum_{x \in T} |\mathcal{O}_x| = 11.$$

Према томе, добили смо да се број 11 може представити као нека сума тројки и седмица. То је немогуће, па добијена контрадикција показује да постоји тражено $x \in X$ такво да је $g \cdot x = x$ за све $g \in G$.
□

Задатак 15. Доказати да за произвољну коначну групу G важи

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\substack{a \in T \\ a \notin Z(G)}} \frac{|G|}{|C_G(a)|},$$

где је T трансверзала партиције групе G на класе конјугације, $Z(G)$ центар групе G и $C_G(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}$ централизатор елемента $a \in G$.

Решење. Посматрајмо дејство групе G на саму себе конјугацијом,

$$g \cdot a = g^{-1}ag, \;\; g, a \in G.$$

Орбита и стабилизатор за произвољно $a \in G$ при овом дејству су редом

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_a &= \{g \cdot a \mid g \in G\} \\
&= \{g^{-1}ag \mid g \in G\} \;\; \rightarrow \text{ класа конјугације за } a \\
\mathrm{Stab}(a) &= \{g \in G \mid g \cdot a = a\} \\
&= \{g \in G \mid g^{-1}ag = a\} \\
&= \{g \in G \mid ag = ga\} = C_G(a).
\end{aligned}$$

Из класне једначине имамо

$$|G| = \sum_{a \in T} |\mathcal{O}_a|,$$

где је T трансверзала партиције групе G на класе конјугације. Приметимо да су класе конјугације елемената из центра једночлане, пошто они комутирају са свим елементима из G. Зато даље имамо

$$\begin{aligned}
|G| &= \sum_{a \in Z(G)} 1 + \sum_{\substack{a \in T \\ a \notin Z(G)}} |\mathcal{O}_a| \\
&= |Z(G)| + \sum_{\substack{a \in T \\ a \notin Z(G)}} |\mathcal{O}_a|.
\end{aligned}$$

Коначно, из теореме о орбити и стабилизатору важи $|\mathcal{O}_a| = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(a)|} = \frac{|G|}{|C_G(a)|}$, што заменом у последњу једнакост даје тражено тврђење.
□

Дефиниција 2.8. Нека је p прост број. Група реда p^n, $n \in \mathbb{N}$ се назива p-група.

Задатак 16. Доказати да p-групе имају нетривијалан центар.

Решење. Нека је G једна p-група, $|G| = p^n$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Из претходног задатка имамо

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{\substack{a \in T \\ a \notin Z(G)}} \frac{p^n}{|C_G(a)|}. \tag{4}$$

Приметимо да за све елементе $a \notin Z(G)$ важи $C_G(a) \neq G$. Како је и сваки централизатор подгрупа од G, закључујемо да су редови свих централизатора $C_G(a)$ за $a \notin Z(G)$ неки степени броја p, мањи од p^n. Према томе, у суми

$$\sum_{\substack{a \in T \\ a \notin Z(G)}} \frac{p^n}{|C_G(a)|}$$

су сви чланови дељиви са p, па је и та сума дељива са p. Из (4) онда следи да и $p \mid |Z(G)|$. Због тога је $Z(G)$ нетривијалан.
□

Дефиниција 2.9. Група се назива простом ако нема правих нормалних подгрупа.

Тврђење 2.10 (Кошијева лема)**.** Нека је G коначна група и p прост број који дели $|G|$. Тада у G постоји елемент реда p.

Задатак 17. Нека је G једна p-група таква да је $|G| \geq p^2$. Доказати да G није проста.

Решење. На основу Задатка 16 имамо да је $|Z(G)| > 1$. Зато, у случају да је $Z(G) \neq G$, имамо да је $Z(G)$ права нормална подгрупа од G. Према томе, у том случају група G није проста.

Остаје још да испитамо шта се дешава када је $Z(G) = G$. У том случају је G Абелова група, па је свака њена подгрупа нормална. На основу Кошијеве леме можемо пронаћи елемент a реда p у G. Тада је подгрупа $H = \langle a \rangle$ од G реда p, па представља једну праву нормалну подгрупу од G. Дакле, ни у овом случају група G није проста.
□

Задатак 18. Доказати да су p-групе решиве.

Решење. Нека је G једна p-група, $|G| = p^n$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Доказ изводимо индукцијом по n.
база индукције:
За $n = 1$, имамо да је $|G| = p$, па је $G \cong \mathbb{Z}_p$. Зато је, специјално, G Абелова група, а тиме и решива.
индукцијска хипотеза: Претпоставимо да су све групе реда p^k решиве за све $1 \leq k \leq n$.
индукцијски корак: Доказујемо да је онда и произвољна група G реда p^{n+1} решива. На основу Задатка 16 имамо да је $|Z(G)| > 1$.

Ако је $Z(G) = G$, онда је G Абелова група, па је и решива.

Ако је $Z(G) \neq G$, из Лагранжеве теореме имамо да је $|Z(G)| = p^k$ за неко $1 \leq k \leq n$. На основу индукцијске хипотезе онда следи да је $Z(G)$ решива група. Такође,

$$|G/Z(G)| = \frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{p^{n+1}}{p^k} = p^{n+1-k}.$$

Како је $1 \leq k \leq n$, следи $1 \leq n+1-k \leq n$, па је и група $G/Z(G)$ решива на основу индукцијске хипотезе. Према томе, групе $Z(G)$ и $G/Z(G)$ су решиве, па је на основу Теореме 1.10 решива и група G.

На основу принципа математичке индукције закључујемо да су све p-групе решиве.
□

Задатак 19. Нека је p прост број. Одредити, до на изоморфизам, све групе реда p^2.

Решење. Нека је $|G| = p^2$. На основу Задатка 16 знамо да је $|Z(G)| > 1$, па нам остаје $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$.

Претпоставимо прво да је $|Z(G)| = p$. Тада је и $|G/Z(G)| = p$, па је та количничка група циклична. Означимо са $aZ(G)$, $a \notin Z(G)$ неки њен генератор. За произвољно $y \in G$, онда постоји $k \in \mathbb{Z}$ такво да је $yZ(G) = a^k Z(G)$. Одатле можемо закључити да $y^{-1}a^k \in Z(G)$. Сада, за комутатор елемената y и a имамо:

$$yay^{-1}a^{-1} = ya\underbrace{y^{-1}a^k}_{\in Z(G)}a^{-k}a^{-1} = yy^{-1}a^k a a^{-k-1} = e.$$

Закључујемо да елементи y и a комутирају. Због произвољности елемента y онда следи да је $a \in Z(G)$. То даје контрадикцију која показује да је немогуће да $Z(G)$ има p елемената.

Остаје нам само могућност $|Z(G)| = p^2$. Тада је $Z(G) = G$, па је G Абелова група. Због тога добијамо да, до на изоморфизам, постоје тачно две групе реда p^2 и то су

$$\mathbb{Z}_{p^2} \quad \text{и} \quad \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p.$$

□

Дефиниција 2.11. Нека је G група. Језгро подгрупе H од G дефинишемо са

$$\operatorname{Core} H = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}.$$

Тврђење 2.12. Нека је H подгрупа групе G. Тада:

- $\operatorname{Core} H \leq H$
- $\operatorname{Core} H \triangleleft G$
- Ако је $N \leq H$ и $N \triangleleft G$, онда је $N \leq \operatorname{Core} H$.

Приметимо да из претходног тврђења следи да је подгрупа H нормална у G ако и само ако је $H = \operatorname{Core} H$.

Теорема 2.13 ($n!$- теорема)**.** Нека је H подгрупа групе G таква да је индекс $[G : H] = n$ коначан. Тада $[G : \operatorname{Core} H] \mid n!$.

Тврђење 2.14. Нека је H подгрупа групе G, таква да је индекс $[G : H]$ најмањи прост број који дели $|G|$. Тада је $H \triangleleft G$.

Задатак 20. Нека је G група реда pq, где су $p < q$ прости бројеви. Доказати да G није проста.

Решење. На основу Кошијеве леме можемо пронаћи елемент a реда q у G. Означимо $H = \langle a \rangle$. Тада је H подгрупа реда q од G, чији је индекс

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{pq}{q} = p.$$

Како је p најмањи прост број који дели $|G|$, закључујемо да је $H \triangleleft G$. Због тога група G није проста.
□

3 Теореме Силова

Дефиниција 3.1. Нека је G коначна група и p прост број који дели $|G|$. Подгрупа од реда p^k, где $p^k \mid |G|$ и $p^{k+1} \nmid |G|$ се назива Силовљева p-подгрупа или S_p подгрупа од G.

Пример 3.2. У групи реда $500 = 2^2 \cdot 5^3$ можемо посматрати S_2 и S_5 подгрупе. Под условом да постоје, S_2 подгрупе су реда 4, а S_5 подгрупе су реда 125.
□

Пример 3.3. У цикличној групи $\mathbb{Z}_{12}$ постоји јединствена S_2 подгрупа која је реда 4 и једнака $\{0, 3, 6, 9\}$, као и јединствена S_3 подгрупа која је реда 3 и једнака $\{0, 4, 8\}$.
□

Теорема 3.4 (Прва теорема Силова)**.** Нека је G коначна група и p прост број који дели $|G|$. Тада постоји S_p подгрупа од G.

Теорема 3.5 (Друга теорема Силова)**.** Нека је G коначна група и p прост број који дели $|G|$. Тада:

- Свака p-подгрупа од G је садржана у некој S_p подгрупи од G.
- Сваке две S_p подгрупе од G су међусобно конјуговане.

Друга теорема Силова ће нам бити од највећег значаја у једном специјалном случају. Претпоставимо да за неку групу G постоји јединствена S_p подгрупа H. Тада нам Друга теорема Силова говори да се конјугацијом подгрупе H увек добија нека S_p подгрупа од G, што у овом случају мора бити поново H. Према томе, подгрупа H је инваријантна у односу на конјугацију, па имамо $H \triangleleft G$. Тиме смо показали следећу значајну последицу коју ћемо често користити.

Последица. Нека је G коначна група и p прост број који дели $|G|$. Ако је S_p подгрупа H од G јединствена, онда је $H \triangleleft G$.

Теорема 3.6 (Трећа теорема Силова)**.** Означимо са s_p број S_p подгрупа коначне групе G и запишимо $|G| = p^k m$, $p \nmid m$. Тада:

- $s_p \equiv 1 \pmod{p}$.
- $s_p \mid m$.

Задатак 21. Испитати да ли Силовљеве подгрупе од $\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_3$ могу бити цикличне.

Решење. Имамо да је $|\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_3| = 72 = 2^3 \cdot 3^2$, па можемо посматрати S_2 и S_3 подгрупе од $\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_3$. Прво, S_2 подгрупе (које постоје на основу Прве теореме Силова) су реда 8, па ће бити цикличне ако у групи $\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_3$ постоје елементи реда 8. Слично, S_3 подгрупе су реда 9, па ће оне бити цикличне ако у $\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_3$ постоје елементи реда 9. Међутим, редови елемената у $\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_3$ могу бити $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, па закључујемо да $\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_3$ нема цикличних Силовљевих подгрупа.
□

Задатак 22. Нека је G група реда pq^k где су p и q прости бројеви такви да је $p < q$. Доказати да група G није проста, као и да је решива.

Решење. На основу Прве теореме Силова можемо уочити S_q подгрупу H од G. Тада је $|H| = q^k$, па је $[G : H] = p$. Пошто је p најмањи прост број који дели $|G|$ закључујемо да је $H \triangleleft G$. Одатле следи да група G није проста.

Можемо приметити и да је подгрупа H решива као једна p-група (на основу Задатка 18). Решива је и количничка група G/H, јер је реда $\frac{|G|}{|H|} = \frac{pq^k}{q^k} = p$. На основу Теореме 1.10 онда можемо закључити да је група G решива.
□

Задатак 23. Одредити, до на изоморфизам, све групе реда pq, где су p и q различити прости бројеви такви да је $p < q$ и $p \nmid q - 1$.

Решење. Нека је $|G| = pq$. На основу Прве теореме Силова можемо уочити S_q подгрупу H од G. Тада је $|H| = q$, па је $H \cong \mathbb{Z}_q$. Приметимо и да је $[G : H] = p$, па пошто је p најмањи прост број који дели $|G|$ закључујемо да је $H \triangleleft G$.

Даље из Треће теореме Силова имамо

$$\begin{aligned} s_p &\equiv 1 \pmod{p} \\ s_p &\mid q. \end{aligned}$$

Пошто је q прост број из другог услова имамо $s_p \in \{1, q\}$. Ако би било $s_p = q$, из првог услова бисмо добили $q \equiv 1 \pmod{p}$, одакле би следило $p \mid q - 1$. То је немогуће из претпоставке задатка, па закључујемо да је $s_p = 1$. На основу Друге теореме Силова (прецизније на основу њене последице коју смо видели), добијамо да је јединствена S_p подгрупа K нормална у G. Приметимо и да је $|K| = p$, па важи $K \cong \mathbb{Z}_p$.

Даље, можемо посматрајмо подгрупу $H \cap K$ од H и K. На основу Лагранжеве теореме следи

$$|H \cap K| \mid |H|, |K| \quad \text{тј.} \quad |H \cap K| \mid q, p.$$

Како су p и q различити прости бројеви, они су узајамно прости, па добијамо $|H \cap K| = 1$ тј. $H \cap K = \langle e \rangle$.

Посматрајмо сада подгрупу HK од G (штавише, ова подгрупа је нормална, јер су и H и K нормалне у G). Имамо

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{qp}{1} = pq = |G|.$$

Можемо закључити да важи $HK = G$.

Дакле, да сумирамо, имамо $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, $H \cap K = \langle e \rangle$ и $HK = G$. На основу Теореме о разлагању следи

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{pq}.$$

Према томе, под датим условима, до на изоморфизам, постоји само једна група реда pq и она је циклична.
□

Задатак 24. Нека је G група реда p^2q, где су p и q различити прости бројеви. Доказати да група G није проста.

Решење. Разликујемо два случаја у зависности од тога да ли је $p > q$ или $p < q$. У првом случају имамо да група G није проста на основу Задатка 22, па остаје само да се позабавимо другим случајем.

Из Треће теореме Силова имамо:

$$\begin{aligned} s_q &\equiv 1 \pmod{q} \\ s_q &\mid p^2. \end{aligned}$$

Пошто је p прост број из другог услова добијамо $s_q \in \{1, p, p^2\}$.

Ако је $s_q = 1$, на основу Друге теореме Силова следи да је јединствена S_q подгрупа нормална у G, па одмах имамо да група G није проста.

Ако је $s_q = p$, из првог услова следи $p \equiv 1 \pmod{q}$. Одавде добијамо $q|p-1$, што није могуће, јер је $p < q$.

Препоставимо да је $s_q = p^2$. Онда је $p^2 \equiv 1 \pmod{q}$, одакле следи $q|p^2 - 1$ тј. $q|(p-1)(p+1)$. Пошто је q прост број закључујемо да $q|p-1$ или $q|p+1$. Већ смо видели да $q \nmid p-1$, па нам остаје $q|p+1$. Још једном се ослањајући на чињеницу да су p и q прости бројеви такви да је $p < q$, добијамо да је $p = 2$ и $q = 3$.

Да сумирамо, имамо да или група G није проста или је $|G| = 12$, па задатак завршавамо да докажемо да група реда 12 не може бити проста. То ћемо издовијити у посебан задатак.
□

Задатак 25. Доказати да група реда 12 није проста.

Решење. Нека је G група реда 12. Означимо са H неку њену S_2 подгрупу. Тада је $|H| = 4$, па је $[G : H] = 3$. На основу $n!$-теореме онда следи

$$[G : \operatorname{Core} H] \mid 3! = 6.$$

Ако би било $\operatorname{Core} H = \langle e \rangle$, онда би важило $[G : \operatorname{Core} H] = |G| = 12$, па бисмо добили $12|6$. То је наравно немогуће, па закључујемо да је $\operatorname{Core} H$ једна права, нормална подгрупа од G. Због тога група G није проста.
□

Задатак 26. Нека је G група реда p^2q, где су p и q различити прости бројеви. Доказати да група G решива.

Решење. Из Задатка 24 знамо да група G није проста, па постоји њена права нормална подгрупа H. Како је $|G| = p^2q$, из Лагранжеве теореме следи да је $|H| \in \{p, q, pq, p^2\}$. Количничка група G/H онда може имати редом pq, p^2, p или q елемената. Закључујемо да у сваком од добијених случајева групе H и G/H морају бити решиве. На основу Теореме 1.10 онда следи да је група G решива.
□

Задатак 27. Нека су $p < q < r$ различити прости бројеви. Доказати да група G реда pqr није проста.

Решење. Из Треће теореме Силова имамо:

$$\begin{aligned} &s_p \equiv 1 \pmod{p} \\ &s_p \mid qr \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &s_q \equiv 1 \pmod{q} \\ &s_q \mid pr \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &s_r \equiv 1 \pmod{r} \\ &s_r \mid pq. \end{aligned} \tag{7}$$

Пошто су бројеви q и r прости, из услова (5) добијамо $s_p \in \{1, q, r, qr\}$. Слично, из услова (6) добијамо $s_q \in \{1, p, r, pr\}$. Међутим, ако би било $s_q = p$, онда би важило $p \equiv 1 \pmod{q}$. Одатле би следило $q \mid p - 1$, што није могуће, јер је $p < q$. Према томе, остаје нам само $s_q \in \{1, r, pr\}$. На потпуно исти начин добијамо $s_r \in \{1, pq\}$.

Претпоставимо сада да је група G проста. Тада мора бити $s_p, s_q, s_r > 1$, па закључујемо да важи $s_p \geq q, s_q \geq r$ и $s_r = pq$. Означимо са H_i све S_p, са K_i све S_q и са L_i све S_r подгрупе од G. Приметимо да је за све i испуњено $|H_i| = p, |K_i| = q$ и $L_i = r$, а имамо и да важи следеће:

- $H_i \cap H_j = K_i \cap K_j = L_i \cap L_j = \langle e \rangle$ за све $i \neq j$
  Свакако важи да је $H_i \cap H_j$ подгрупа и од H_i и од H_j. Како су H_i и H_j обе реда p, њихове једине подгрупе су тривијална подгрупа $\langle e \rangle$ и оне саме. Пошто је $H_i \neq H_j$, друго је немогуће, па следи $H_i \cap H_j = \langle e \rangle$. Потпуно аналогно се ради за $K_i \cap K_j$ и $L_i \cap L_j$.

- $H_i \cap K_j = K_i \cap L_j = L_i \cap H_j = \langle e \rangle$ за све i и j
  Важи да је $H_i \cap K_j$ подгрупа од H_i и K_j, па на основу Лагранжеве теореме следи

  $$|H_i \cap K_j| \mid |H_i|, |K_j| \quad \text{тј.} \quad |H_i \cap K_j| \mid p, q.$$

  Како су p и q различити прости бројеви, они су узајамно прости, па добијамо $|H_i \cap K_j| = 1$ тј. $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$. На потпуно исти начин радимо и за $K_i \cap L_j$ и $L_i \cap H_j$.

Посматрајмо сада скуп $\mathcal{S}$ у којем су сви елементи групе G који се налазе у једној од подгрупа H_i, K_i или L_i. Са једне стране, свакако је $\mathcal{S} \subseteq G$, па важи $|\mathcal{S}| \leq |G|$. Са друге стране, пошто смо видели да се све подгрупе H_i, K_i и L_i међусобно секу тривијално, добијамо да је

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| &= s_p(p-1) + s_q(q-1) + s_r(r-1) + 1 \\ &\geq q(p-1) + r(q-1) + pq(r-1) + 1 \\ &= pq - q + qr - r + pqr - pq + 1 \\ &= pqr + (q-1)(r-1) \\ &> pqr = |G|. \end{aligned}$$

Према томе, добили смо контрадикцију и она управо показује да група G није проста.
□

Задатак 28. Нека су $p < q < r$ различити прости бројеви. Доказати да је група G реда pqr решива.

Решење. Из претходног задатка знамо да је $s_p = 1$, $s_q = 1$ или $s_r = 1$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $s_p = 1$. Означимо са H јединствену S_p подгрупу од G. Тада важи да је $H \triangleleft G$ и $|H| = p$. Из друге чињенице можемо закључити да је подгрупа H решива. Такође, количничка група G/H је реда $\frac{pqr}{p} = qr$, што значи да је и она решива. На основу Теореме 1.10 закључујемо да је група G решива.
□

Задатак 29. Нека је G група реда p^2q^2, где су $p < q$ прости бројеви. Доказати да група G није проста.

Решење. Из Треће теореме Силова имамо:

$$\begin{aligned} s_q &\equiv 1 \pmod{q} \\ s_q &\mid p^2. \end{aligned}$$

Пошто је p прост број из другог услова добијамо $s_q \in \{1, p, p^2\}$.

Ако је $s_q = 1$, на основу Друге теореме Силова следи да је јединствена S_q подгрупа нормална у G, па одмах имамо да група G није проста.

Ако је $s_q = p$, из првог услова следи $p \equiv 1 \pmod{q}$. Одавде добијамо $q|p-1$, што није могуће, јер је $p < q$.

Препоставимо да је $s_q = p^2$. Онда је $p^2 \equiv 1 \pmod{q}$, одакле следи $q|p^2 - 1$ тј. $q|(p-1)(p+1)$. Пошто је q прост број закључујемо да $q|p-1$ или $q|p+1$. Већ смо видели да $q \nmid p-1$, па нам остаје $q|p+1$. Још једном се ослањајући на чињеницу да су p и q прости бројеви такви да је $p < q$, добијамо да је $p = 2$ и $q = 3$.

Да сумирамо, имамо да или група G није проста или је $|G| = 36$, па задатак завршавамо да докажемо да група реда 36 не може бити проста. То ћемо издовијити у посебан задатак.
□

Задатак 30. Доказати да група реда 36 није проста.

Решење. Нека је G група реда 36. Означимо са H неку њену S_3 подгрупу. Тада је $|H| = 9$, па је $[G : H] = 4$. На основу $n!$-теореме онда следи

$$[G : \operatorname{Core} H] \mid 4! = 24.$$

Ако би било $\operatorname{Core} H = \langle e \rangle$, онда би важило $[G : \operatorname{Core} H] = |G| = 36$, па бисмо добили $36|24$. То је наравно немогуће, па закључујемо да је $\operatorname{Core} H$ једна права, нормална подгрупа од G. Због тога група G није проста.
□

Задатак 31. Нека је G група реда p^2q^2, где су $p < q$ прости бројеви. Доказати да је група G решива.

Решење. Из Задатка 29 знамо да група G није проста, па постоји њена права нормална подгрупа H. Како је $|G| = p^2q^2$, из Лагранжеве теореме следи да је $|H| \in \{p, p^2, q, q^2, pq, p^2q, pq^2\}$. Количничка група G/H онда може имати редом pq^2, q^2, p^2q, p^2, pq, q или p елемената. Закључујемо да у сваком од добијених случајева групе H и G/H морају бити решиве. На основу Теореме 1.10 онда следи да је група G решива.
□

Задатак 32. Нека је p непаран прост број. Доказати да група G реда $8p$ није проста.

Решење. Из Треће теореме Силова имамо:

$$\begin{aligned} s_p &\equiv 1 \pmod{p} \\ s_p &\mid 8. \end{aligned}$$

Из другог услова добијамо могућности $s_p \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Ако је $s_p = 1$, на основу Друге теореме Силова следи да је јединствена S_p подгрупа нормална у G, па одмах имамо да група G није проста.

Ако је $s_p = 2$, из првог услова имамо да је $2 \equiv 1 \pmod{p}$, што није могуће.

Ако је $s_p = 4$, из првог услова имамо да је $4 \equiv 1 \pmod{p}$, што нам даје $p = 3$.

Ако је $s_p = 8$, из првог услова имамо да је $8 \equiv 1 \pmod{p}$, што нам даје $p = 7$.

Дакле, или група G није проста или је $|G| \in \{24, 56\}$. Преостала два случаја $|G| = 24$ и $|G| = 56$ издвајамо у посебне задатке.
□

Задатак 33. Доказати да група реда 24 није проста.

Решење. Нека је G група реда 24. Означимо са H неку њену S_2 подгрупу. Тада је $|H| = 8$, па је $[G : H] = 3$. На основу $n!$-теореме онда следи

$$[G : \operatorname{Core} H] \mid 3! = 6.$$

Ако би било $\operatorname{Core} H = \langle e \rangle$, онда би важило $[G : \operatorname{Core} H] = |G| = 24$, па бисмо добили $24|6$. То је наравно немогуће, па закључујемо да је $\operatorname{Core} H$ једна права, нормална подгрупа од G. Због тога група G није проста.
□

Задатак 34. Доказати да група реда 56 није проста.

Решење. Нека је $|G| = 56$. Из Треће теореме Силова имамо

$$\left.\begin{aligned} s_2 &\equiv 1 \pmod{2} \\ s_2 &\mid 7 \end{aligned}\right\} \longrightarrow s_2 \in \{1, 7\}$$

$$\left.\begin{aligned} s_7 &\equiv 1 \pmod{7} \\ s_7 &\mid 8 \end{aligned}\right\} \longrightarrow s_7 \in \{1, 8\}.$$

Претпоставимо да је група G проста. Тада мора бити $s_2 = 7$ и $s_7 = 8$. Означимо са H_i све S_7 подгрупе од G. Поред њих ћемо посматрати и две S_2 подгрупе K_1 и K_2 од G. Приметимо да је $|H_i| = 7$ и $|K_i| = 8$ за све i. Имамо следеће:

- $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$ за све i и j
  Важи да је $H_i \cap K_j$ подгрупа од H_i и K_j, па на основу Лагранжеве теореме следи

$$|H_i \cap K_j| \mid |H_i|, |K_j| \quad \text{тј.} \quad |H_i \cap K_j| \mid 7, 8.$$

  Како су бројеви 7 и 8 узајамно прости, следи $|H_i \cap K_j| = 1$ тј. $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$.

- $H_i \cap H_j = \langle e \rangle$ за све $i \neq j$
  Важи да је $H_i \cap H_j$ подгрупа и од H_i и од H_j. Како су H_i и H_j обе реда 7, њихове једине подгрупе су тривијална подгрупа $\langle e \rangle$ и оне саме. Пошто је $H_i \neq H_j$, друго је немогуће, па следи $H_i \cap H_j = \langle e \rangle$.

Приметимо да пресек подгрупа K_1 и K_2 не мора бити тривијалан, пошто оне нису простог реда. Оне су реда 8 и различите, па из Лагранжеве теореме следи $|K_1 \cap K_2| \in \{1, 2, 4\}$. Пошто је $|K_1 \cup K_2| = |K_1| + |K_2| - |K_1 \cap K_2|$, добијамо

$$|K_1 \cup K_2| \geq 8 + 8 - 4 = 12.$$

Означимо сада са $\mathcal{S}$ скуп елемената из G који се налазе у некој од погрупа H_i, K_1 или K_2. Тада је $\mathcal{S} \subseteq G$, па имамо $|\mathcal{S}| \leq |G|$. Са друге стране, пошто се подгупе H_i међусобно и са подгрупама K_1 и K_2 секу тривијално, имамо да је

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| &= s_7(7-1) + |K_1 \cup K_2| \\ &\geq 8 \cdot 6 + 12 \\ &= 60 > |G|. \end{aligned}$$

Добијамо контрадикцију која показује да група G није проста.
□

Задатак 35. Нека је p непаран прост број. Доказати да је група G реда $8p$ решива.

Решење. На основу Задатка 29 знамо да група G није проста, па постоји њена права нормална подгрупа H. Како је $|G| = 8p$, из Лагранжеве теореме следи да је $|H| \in \{2, 4, 8, p, 2p, 4p\}$. Количничка група G/H онда може имати редом $4p$, $2p$, p, 8, 4 или 2 елемента. Закључујемо да у сваком од добијених случајева групе H и G/H морају бити решиве. На основу Теореме 1.10 онда следи да је група G решива.
□

Задатак 36. Доказати да група реда 48 није проста.

Решење. Нека је G група реда 48. Означимо са H неку њену S_2 подгрупу. Тада је $|H| = 16$, па је $[G : H] = 3$. На основу $n!$-теореме онда следи

$$[G : \operatorname{Core} H] \mid 3! = 6.$$

Ако би било $\operatorname{Core} H = \langle e \rangle$, онда би важило $[G : \operatorname{Core} H] = |G| = 48$, па бисмо добили $48|6$. То је наравно немогуће, па закључујемо да је $\operatorname{Core} H$ једна права, нормална подгрупа од G. Због тога група G није проста.
□

Задатак 37. Доказати да је група реда 48 решива.

Решење. Нека је G група реда 48. На претходног задатка знамо да та група није проста, па постоји њена права нормална подгрупа H. Како је $|G| = 48$, из Лагранжеве теореме следи да је $|H| \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$, а исте су и могућности за ред количничке групе G/H. Закључујемо да у сваком од могућих случајева групе H и G/H морају бити решиве. На основу Теореме 1.10 онда следи да је група G решива.
□

Последица (Последица до сада урађених задатака)**.** Нека је G нетривијална група реда мањег од 60. Тада је G решива. Додатно, под условом да $|G|$ није прост број, имамо и да група G није проста.

Најмања проста група која није простог реда је алтернирајућа група $\mathbb{A}_5$ и она је управо реда 60. То је уједно и најмања група која није решива (видети Пример 1.8).

Задатак 38. Нека је G група реда $5 \cdot 7 \cdot 17$. Доказати да је група G циклична.

Решење. Из Треће теореме Силова имамо:

$$\left.\begin{array}{l} s_5 \equiv 1 \pmod 5 \\ s_5 \mid 7 \cdot 17 \end{array}\right\} \longrightarrow s_5 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} s_7 \equiv 1 \pmod 7 \\ s_7 \mid 5 \cdot 17 \end{array}\right\} \longrightarrow s_7 \in \{1, 85\}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_{17} \equiv 1 \pmod{17} \\ s_{17} \mid 5 \cdot 7 \end{array}\right\} \longrightarrow s_{17} \in \{1, 35\}.$$

Одмах можемо закључити да је јединствена S_5 подгрупа H нормална у G. Приметимо да је $|H| = 5$, па је $H \cong \mathbb{Z}_5$.

Докажимо још да мора бити $s_7 = 1$ или $s_{17} = 1$. За почетак ћемо претпоставити супротно; тада је $s_7 = 85$ и $s_{17} = 35$. Означимо са K_i све S_7 подгрупе и са L_i све S_{17} подгрупе од G. Тада је $|K_i| = 7$ и $|L_i| = 17$. Имамо и следеће:

- $K_i \cap L_j = \langle e \rangle$ за све i и j
  Важи да је $K_i \cap L_j$ подгрупа од K_i и L_j, па на основу Лагранжеве теореме следи

  $$|K_i \cap L_j| \mid |K_i|, |L_j| \quad \text{тј.} \quad |K_i \cap L_j| \mid 7, 17.$$

  Како су бројеви 7 и 17 узајамно прости, следи $|K_i \cap L_j| = 1$ тј. $K_i \cap L_j = \langle e \rangle$.

- $K_i \cap K_j = L_i \cap L_j = \langle e \rangle$ за све $i \neq j$
  Важи да је $K_i \cap K_j$ подгрупа и од K_i и од K_j. Како су K_i и K_j обе реда 7, њихове једине подгрупе су тривијална подгрупа $\langle e \rangle$ и оне саме. Пошто је $K_i \neq K_j$, друго је немогуће, па следи $K_i \cap K_j = \langle e \rangle$. Потпуно слично радимо и за $L_i \cap L_j$.

Означимо са $\mathcal{S}$ скуп елемената из G који се налазе у некој од погрупа K_i или L_i. Тада је $\mathcal{S} \subseteq G$, па имамо $|\mathcal{S}| \leq |G|$. Са друге стране, пошто се све подгупе K_i и L_i међусобно секу тривијално, добијамо да је

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| &= s_7(7-1) + s_{17}(17-1) + 1 \\ &= 85 \cdot 6 + 35 \cdot 16 + 1 \\ &= 1071 > |G|. \end{aligned}$$

Добијена контрадикција показује да је $s_7 = 1$ или $s_{17} = 1$. Фиксирајмо сада једну S_7 подгрупу K и S_{17} подгрупу L од G. Из претходног знамо да је барем једна од њих јединствена, а тиме и нормална у G. Због тога је $M := KL$ подгрупа од G. Приметимо да је

$$|M| = |KL| = \frac{|K||L|}{|K \cap L|} = \frac{7 \cdot 17}{1} = 7 \cdot 17.$$

Како су 7 и 17 прости бројеви такви да $7 \nmid 17 - 1$ закључујемо да је подгрупа M циклична, $M \cong \mathbb{Z}_{7\cdot 17}$ (на основу Задатка 23). Такође, важи да је $[G : M] = 5$, па како је 5 најмањи прост број који дели $|G|$, добијамо да је $M \triangleleft G$.

Испитајмо још однос подгрупе M са H. Пошто је $H \cap M$ подгрупа од H и M, из Лагранжеве теореме следи

$$|H \cap M| \mid |H|, |M| \quad \text{тј.} \quad |H \cap M| \mid 5, 7 \cdot 17.$$

Бројеви 5 и $7 \cdot 17$ су узајамно прости, одакле закључујемо $|H \cap M| = 1$ тј. $H \cap M = \langle e \rangle$. Можемо закључити и

$$|HM| = \frac{|H||M|}{|H \cap M|} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 17}{1} = 5 \cdot 7 \cdot 17 = |G|.$$

Пошто је $HM \leq G$, добијамо $HM = G$. Дакле, да сумирамо, имамо да су $H, M \triangleleft G$, $H \cap M = \langle e \rangle$ и $HM = G$. Из Теореме о разлагању онда следи

$$G \cong H \times M \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{7\cdot 17} \cong \mathbb{Z}_{5\cdot 7\cdot 17}.$$

Према томе, доказали смо да је група G циклична.
□

Задатак 39. Нека је G група реда $2^2 \cdot 19 \cdot 37$. Доказати да тада:
а) G има нормалну подгрупу реда $19 \cdot 37$.
б) G има подгрупу индекса 2.

Решење. а) Из Треће теореме Силова имамо:

$$\left.\begin{array}{l} s_{19} \equiv 1 \pmod{19} \\ s_{19} \mid 2^2 \cdot 37 \end{array}\right\} \longrightarrow s_{19} = 1.$$

Закључујемо да је јединствена S_{19} подгрупа H нормална у G. Означимо са K неку S_{37} подгрупу од G. Тада је $HK \leq G$. Из Лагранжеве теореме, пошто је $H \cap K \leq H, K$ закључујемо

$$|H \cap K| \mid |H|, |K| \quad \text{тј.} \quad |H \cap K| \mid 19, 37.$$

Добијамо да је $|H \cap K| = 1$, одакле следи

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{19 \cdot 37}{1} = 19 \cdot 37.$$

Према томе, $M := HK$ је тражена подгрупа, уколико покажемо да је она нормална у G. Приметимо да је $[G : M] = 4$, па на основу $n!$-теореме следи

$$[G : \operatorname{Core} M] | 4!.$$

Дакле, имамо

$$\frac{|G|}{|\operatorname{Core} M|} \mid 24 \quad \text{тј.} \quad \frac{2^2 \cdot 19 \cdot 37}{|\operatorname{Core} M|} \mid 24.$$

Из последњег закључујемо да $19 \cdot 37 \mid |\operatorname{Core} M|$, па како је $\operatorname{Core} M \leq M$, добијамо $\operatorname{Core} M = M$. Због тога је подгрупа M нормална у G.
б) На основу Кошијеве леме у групи G можемо уочити елемент a реда 2. Означимо са L цикличну подгрупу од G генерисану са a. Тада је $|L| = 2$. Поред L посматрајмо подгрупу M из дела а). Како смо показали да је $M \triangleleft G$, важи да је $LM \leq G$.

Из Лагранжеве теореме, пошто је $L \cap M \leq L, M$ закључујемо

$$|L \cap M| \mid |L|, |M| \quad \text{тј.} \quad |L \cap M| \mid 2, 19 \cdot 37.$$

Добијамо да је $|L \cap M| = 1$, одакле следи

$$|LM| = \frac{|L||M|}{|L \cap M|} = \frac{2 \cdot 19 \cdot 37}{1} = 2 \cdot 19 \cdot 37.$$

Зато је LM индекса 2 у G и представља тражену подгрупу.
□

Задатак 40. Нека је G група реда $1947 = 3 \cdot 11 \cdot 59$.
а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 3 или реда 11.
б) Доказати да G има подгрупу реда $3 \cdot 11$. Да ли је она циклична?
в) Доказати да G има подгрупу реда $11 \cdot 59$. Да ли је она нормална?

Решење. а) Из Треће теореме Силова имамо:

$$\left.\begin{array}{l} s_3 \equiv 1 \pmod 3 \\ s_3 \mid 11 \cdot 59 \end{array}\right\} \longrightarrow s_3 \in \{1, 11 \cdot 59\}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_{11} \equiv 1 \pmod{11} \\ s_{11} \mid 3 \cdot 59 \end{array}\right\} \longrightarrow s_{11} \in \{1, 3 \cdot 59\}.$$

Докажимо да мора бити $s_3 = 1$ или $s_{11} = 1$. У супротном је $s_3 = 11 \cdot 59$ и $s_{11} = 3 \cdot 59$. Означимо са H_i све S_3 подгрупе и са K_i све S_{11} подгрупе од G. Тада је $|H_i| = 3$ и $|K_i| = 11$. Имамо и следеће:

- $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$ за све i и j
  Важи да је $H_i \cap K_j$ подгрупа од H_i и K_j, па на основу Лагранжеве теореме следи

  $$|H_i \cap K_j| \mid |H_i|, |K_j| \quad \text{тј.} \quad |H_i \cap K_j| \mid 3, 11.$$

  Како су бројеви 3 и 11 узајамно прости, следи $|H_i \cap K_j| = 1$ тј. $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$.

- $H_i \cap H_j = K_i \cap K_j = \langle e \rangle$ за све $i \neq j$
  Важи да је $H_i \cap H_j$ подгрупа и од H_i и од H_j. Како су H_i и H_j обе реда 3, њихове једине подгрупе су тривијална подгрупа $\langle e \rangle$ и оне саме. Пошто је $H_i \neq H_j$, друго је немогуће, па следи $H_i \cap H_j = \langle e \rangle$. Потпуно слично радимо и за $K_i \cap K_j$.

Означимо са $\mathcal{S}$ скуп елемената из G који се налазе у некој од погрупа H_i или K_i. Тада је $\mathcal{S} \subseteq G$, па имамо $|\mathcal{S}| \leq |G|$. Са друге стране, пошто се све подгрупе H_i и K_i међусобно секу тривијално, добијамо да је

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| &= s_3(3-1) + s_{11}(11-1) + 1 \\ &= 11 \cdot 59 \cdot 2 + 3 \cdot 59 \cdot 10 + 1 \\ &= 3069 > |G|. \end{aligned}$$

Добијена контрадикција показује да је $s_3 = 1$ или $s_{11} = 1$. То значи да је барем једна од S_3 или S_{11} подгрупа јединствена, а тиме и нормална у G. Оне су управо реда 3 или 11, чиме завршавамо овај део.
б) Уочимо сада произвољну фиксирану S_3 подгрупу H и S_{11} подгрупу K од G. Тада је $|H| = 3$ и $|K| = 11$, а из дела а) знамо да је барем једна од њих нормална у G, као и да је $|H \cap K| = 1$. Због тога је $HK \leq G$ и

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{3 \cdot 11}{1} = 3 \cdot 11.$$

Дакле, HK представља тражену подгрупу. Пошто су 3 и 11 различити прости бројеви такви да $3 \nmid 11 - 1$, закључујемо да она јесте циклична (на основу Задатка 23).
в) Ослонимо се још једном на трећу теорему Силова да добијемо

$$\left.\begin{aligned} s_{59} &\equiv 1 \pmod{59} \\ s_{59} &\mid 3 \cdot 11 \end{aligned}\right\} \longrightarrow s_{59} = 1.$$

Закључујемо да је јединствена S_{59} подгрупа L нормална у G. Због тога је $KL \leq G$, где је K S_{11} подгрупа од G из дела б). Из Лагранжеве теореме, пошто је $K \cap L \leq K, L$ добијамо

$$|K \cap L| \mid |K|, |L| \quad \text{тј.} \quad |K \cap L| \mid 11, 59.$$

Добијамо да је $|K \cap L| = 1$, одакле следи

$$|KL| = \frac{|K||L|}{|K \cap L|} = \frac{11 \cdot 59}{1} = 11 \cdot 59.$$

Дакле, KL је тражена подгрупа. Пошто је њен индекс у G једнак 3, што је најмањи прост број који дели $|G|$, закључујемо да та подгрупа јесте нормална.
□

Наредних пар задатака ће нам дати још један метод за показивање да нека група није проста, који често ради у ситуацији када не функционише ништа што смо до сада видели.

Задатак 41. Нека је G проста група и H подгрупа од G коначног индекса $k > 1$. Доказати да је тада је $G \leq \mathbb{S}_k$.

Решење. Посматрајмо дејство групе G на скуп G/H дефинисано са

$$g \cdot aH = gaH, \;\; g, a \in G.$$

Подсетимо се да ово дејство можемо видети и као хомоморфизам $\phi : G \to \mathrm{Sym}(G/H)$ дефинисан са

$$\phi(g) = \tau_g, \quad \text{где је } \tau_g : G/H \to G/H,\ \tau_g(aH) = gaH, a \in G.$$

Одредимо језгро овог хомоморфизма,

$$\begin{aligned}
\ker \phi &= \{g \in G \mid \phi(g) = \mathrm{id}_{G/H}\} \\
&= \{g \in G \mid \tau_g = \mathrm{id}_{G/H}\} \\
&= \{g \in G \mid gaH = aH \text{ за све } a \in G\} \\
&= \{g \in G \mid a^{-1}gaH = H \text{ за све } a \in G\} \\
&= \{g \in G \mid a^{-1}ga \in H \text{ за све } a \in G\} \\
&= \{g \in G \mid g \in aHa^{-1} \text{ за све } a \in G\} \\
&= \mathrm{Core}\, H.
\end{aligned}$$

Пошто је група G проста и $\mathrm{Core}\, H \leq H$, закључујемо да је $\mathrm{Core}\, H = \langle e \rangle$. Према томе, хомоморфизам ϕ има тривијално језгро, па је утапање. Због тога можемо сматрати да је $G \leq \mathrm{Sym}(G/H)$. Коначно, пошто је $[G : H] = k$, важи $\mathrm{Sym}(G/H) \cong \mathbb{S}_k$, чиме добијамо тражено $G \leq \mathbb{S}_k$.
□

Наредно тврђење је последица доказа треће теореме Силова.

Тврђење 3.7. Нека је K једна S_p подгрупа групе G и $N_G K$ нормализатор за G у K. Тада је

$$[G : N_G K] = s_p.$$

Задатак 42. Нека је p прост број такав да $p \mid k!$ и $p^2 \nmid k!$ и H једна S_p подгрупа од $\mathbb{S}_k$. Тада важи:

$$|N_{\mathbb{S}_k} H| = p(p-1)(k-p)!.$$

Решење. На основу Тврђења 3.7 имамо

$$[\mathbb{S}_k : N_{\mathbb{S}_k} H] = s_p,$$

одакле је

$$|N_{\mathbb{S}_k} H| = \frac{|\mathbb{S}_k|}{s_p} = \frac{k!}{s_p}. \tag{8}$$

Према томе, све што треба да одредимо је број s_p Силовљевих p-подгрупа од G. Пошто $p \mid k!$ и $p^2 \nmid k!$ имамо да су S_p подгрупе од G реда p. Оне су стога цикличне, генерисане елементима реда p.

Вративши се на услове $p \mid k!$ и $p^2 \nmid k!$ закључујемо да је $p \leq k < 2p$, па су p-циклови једини елементи реда p у $\mathbb{S}_k$. Одредимо њихов број m.

Пре свега, сваки p-цикл можемо видети као уређењу p-торку неких p изабраних елемената из скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$. Број свих таквих p-торки је $\binom{k}{p}p!$. Међутим, ако се сви елементи у некој p-торци ротирају за $1, 2, \ldots, p$ места удесно, одговарајући цикл остаје исти. То значи да сваком p-циклу одговара p различитих p-торки, па је

$$m = \binom{k}{p}\frac{p!}{p} = \binom{k}{p}(p-1)!.$$

Вратимо се сада на S_p подгрупе. Оне су цикличне, реда p и број њихових генератора је $p-1$. Наравно, сви њихови генератори су p-циклови, па закључујемо да свакој фиксираној S_p подгрупи одговара $p-1$ различит p-цикл. Због тога је

$$s_p = \frac{m}{p-1} = \frac{\binom{k}{p}(p-1)!}{p-1} = \frac{k!}{(k-p)!p!}(p-2)! = \frac{k!}{(k-p)!p(p-1)}.$$

Враћањем у (8) добијамо

$$|N_{\mathbb{S}_k}H| = \frac{k!}{\frac{k!}{(k-p)!p(p-1)}} = p(p-1)(k-p)!,$$

чиме добијамо тражено.
□

Задатак 43. Нека је p прост број, $k \in \{p, p+1\}$ и H једна S_p подгрупа од $\mathbb{S}_k$. Тада важи:

$$|N_{\mathbb{S}_k}H| = p(p-1).$$

Решење. Ово је само директна последица претходног задатка.
□

Задатак 44. Доказати да група реда $2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$ није проста.

Решење. Нека је $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$. Из Треће теореме Силова имамо:

$$\left.\begin{array}{l} s_2 \equiv 1 \pmod 2 \\ s_2 \mid 3 \cdot 7^2 \end{array}\right\} \longrightarrow s_2 \in \{1, 3, 7, 21, 49, 147\}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_3 \equiv 1 \pmod 3 \\ s_3 \mid 2^3 \cdot 7^2 \end{array}\right\} \longrightarrow s_3 \in \{1, 4, 7, 28, 49, 192\}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_7 \equiv 1 \pmod 7 \\ s_7 \mid 2^3 \cdot 3 \end{array}\right\} \longrightarrow s_7 \in \{1, 8\}.$$

Претпоставимо да је група G проста. Тада мора бити $s_7 = 8$. Означимо са K једну S_7 подгрупу од G. На основу Тврђења 3.7 имамо

$$[G : N_G K] = s_7 = 8,$$

па нам Задатак 41 омогућава да сматрамо $G \leq \mathbb{S}_8$. Из Лагранжеве теореме онда следи

$$2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \mid 8!,$$

што је контрадикција, јер $7^2 \nmid 8!$. Према томе, група G не може бити проста.
□

Задатак 45. Доказати да група реда 396 није проста.

Решење. Нека је $|G| = 396$. Из Треће теореме Силова имамо:

$$\left.\begin{array}{ll} s_2 \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 2) \\ s_2 \mid 99 & \end{array}\right\} \longrightarrow s_2 \in \{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} s_3 \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 3) \\ s_3 \mid 44 & \end{array}\right\} \longrightarrow s_3 \in \{1, 4, 22\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} s_{11} \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 11) \\ s_{11} \mid 36 & \end{array}\right\} \longrightarrow s_{11} \in \{1, 12\}.$$

Претпоставимо да је група G проста. Тада мора бити $s_{11} = 12$. Означимо са H једну S_{11} подгрупу од G. На основу Тврђења 3.7 имамо

$$[G : N_G H] = s_{11} = 12,$$

па нам Задатак 41 омогућава да сматрамо $G \leq \mathbb{S}_{12}$. Приметимо да, пошто $11 \mid |\mathbb{S}_{12}| = 12!$ и $11^2 \nmid |\mathbb{S}_{12}| = 12!$, можемо сматрати да је H и једна S_{11} подгрупа од $\mathbb{S}_{12}$. Како је $G \leq \mathbb{S}_{12}$, онда је и $N_G H \leq N_{\mathbb{S}_{12}} H$, па из Лагранжеве теореме следи

$$|N_G H| \mid |N_{\mathbb{S}_{12}} H|. \tag{9}$$

Остаје само још да израчунамо редове нормализатора који се појављују. Са једне стране, како смо већ видели, важи $[G : N_G H] = 12$, одакле је

$$|N_G H| = \frac{|G|}{12} = \frac{396}{12} = 33.$$

Са друге стране, из Задатка 43 директно следи $|N_{\mathbb{S}_{12}} H| = 11 \cdot (11 - 1) = 110$.

Враћањем у (9) добијамо контрадикцију

$$33 \mid 110,$$

која показује да група G није проста.
□

4 Полудиректан производ група

Нека су H и K две групе и $\varphi : K \to \operatorname{Aut} H$ хомоморфизам група. На скупу $H \times K$ онда можемо дефинисати бинарну операцију са

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1\varphi(k_1)(h_2), k_1k_2), \;\; h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K. \tag{10}$$

Скуп $H \times K$ је једна група у односу на ову операцију. Називамо је полудиректним производом група H и K и означавамо је са $H \rtimes_\varphi K$.

Неутрал за операцију (10) је уређени пар (e, e) кога чине неутрал из групе H, односно K. Такође, инверз за произвољни елемент (h, k), $h \in H$, $k \in K$ је одређен са

$$(h, k)^{-1} = (\varphi(k^{-1})(h^{-1}), k^{-1}).$$

Остале особине полудиректног производа описане су наредним тврђењем.

Тврђење 4.1. Нека су H и K две групе и $\varphi : K \to \operatorname{Aut} H$ хомоморфизам група. Тада важи:

- $|H \rtimes_\varphi K| = |H||K|$.
- $H \cong \{(h, e) \mid h \in H\}$, па можемо сматрати да је H подгрупа од $H \rtimes_\varphi K$.
- $K \cong \{(e, k) \mid k \in K\}$, па можемо сматрати да је K подгрупа од $H \rtimes_\varphi K$.
- $H \lhd H \rtimes_\varphi K$.

Задатак 46. Нека су H и K две групе и $\varphi : K \to \operatorname{Aut} H$ хомоморфизам група. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

а) Хомоморфизам φ је тривијалан.

б) $K \lhd H \rtimes_\varphi K$.

в) $H \rtimes_\varphi K \cong H \times K$.

Решење. Доказаћемо да важи а)$\to$ в) $\to$ б) $\to$ а). Идемо редом:
а)$\to$ в) Нека је φ тривијалан хомоморфизам. Тада за све $k \in K$ важи $\varphi(k) = \mathrm{id}_H$. За произвољне (h_1, k_1) и (h_2, k_2) из $H \rtimes_\varphi K$ онда имамо

$$\begin{aligned}(h_1, k_1)(h_2, k_2) &= (h_1\varphi(k_1)(h_2), k_1k_2)\\ &= (h_1 \,\mathrm{id}_H(h_2), k_1k_2)\\ &= (h_1h_2, k_1k_2),\end{aligned}$$

што показује да важи $H \rtimes_\varphi K \cong H \times K$.
в) $\to$ б) Ово је јасно зато што важи $K \lhd H \times K$.
б) $\to$ а) Нека је $K \lhd H \rtimes_\varphi K$. Тада је K инваријантна у односу на конјугацију елементима из $H \rtimes_\varphi K$, па за произвољне $h \in H, k, k_1 \in K$ важи

$$(h, k)(e, k_1)(h, k)^{-1} \in K.$$

Даље добијамо

$$(h\varphi(k)(e), kk_1)(\varphi(k^{-1})(h^{-1}), k^{-1}) \in K$$
$$(h, kk_1)(\varphi(k^{-1})(h^{-1}), k^{-1}) \in K$$
$$(h\varphi(kk_1)(\varphi(k^{-1})(h^{-1})), kk_1k^{-1}) \in K.$$

Наравно, у претходном запису се под K мисли на изоморфну копију $\{(e,k) \mid k \in K\}$ те подгрупе у $H \rtimes_\varphi K$. Јасно је да $kk_1k^{-1} \in K$, јер су $k, k_1 \in K$, па нам остаје само услов

$$h\varphi(kk_1)(\varphi(k^{-1})(h^{-1})) = e \quad \text{тј.} \quad \varphi(kk_1)(\varphi(k^{-1})(h^{-1})) = h^{-1}.$$

Тај услов мора бити испуњен за све $k \in K$, па можемо одабрати $k = e$. Тако добијамо да важи

$$\varphi(k_1)(h^{-1}) = h^{-1}$$

за све $k_1 \in K$ и $h \in H$. Закључујемо да је $\varphi(k_1) = \mathrm{id}_H$ за све $k_1 \in K$, а то управо значи да је φ тривијалан хомоморфизам.
□

Наредно тврђење омогућава да се нека група разложи на полудиректан производ својих подгрупа и биће нам од кључног значаја у даљем раду.

Тврђење 4.2. Нека су H и K подгрупе групе G такве да је $H \triangleleft G$, $H \cap K = \{e\}$ и $G = HK$. Тада постоји хомоморфизам $\varphi : K \to \mathrm{Aut}\, H$ такав да је $G \cong H \rtimes_\varphi K$.

Задатак 47. Нека је p непаран прост број. Одредити, до на изоморфизам, све групе реда $2p$.

Решење. Нека је $|G| = 2p$. На основу Кошијеве леме можемо пронаћи елемент a реда p у групи G. Означимо $H = \langle a \rangle$. Тада је $|H| = p$, па важи $H \cong \mathbb{Z}_p$. Додатно, имамо да је $[G : H] = 2$, па је $H \triangleleft G$.

Слично, на основу Кошијеве леме постоји елемент b реда 2 у G. Циклична подгрупа $K = \langle b \rangle$ је онда реда 2 и важи $K \cong \mathbb{Z}_2$. На основу Лагранжеве теореме следи

$$|H \cap K| \mid |H|, |K| \quad \text{тј.} \quad |H \cap K| \mid p, 2.$$

Закључујемо да је $|H \cap K| = 1$, односно $H \cap K = \{e\}$. Како је $HK \leq G$, чињеница да је $|HK| = |H||K| = p \cdot 2 = |G|$ показује да је $HK = G$. Дакле, имамо $H \triangleleft G$, $H \cap K = \{e\}$ и $HK = G$, па на основу Тврђења 4.2 следи да је $G \cong H \rtimes_\varphi K$ за неки хомоморфизам $\varphi : K \to \mathrm{Aut}\, H$.

Остаје још да одредимо које су све могућности за φ. Због чињенице да је $K = \langle b \rangle$ имамо да је хомоморфизам φ у потпуности одређен са $\varphi(b)$. При томе је b реда 2, па како при хомоморфизму ред слике дели ред оригинала, закључујемо да $r(\varphi(b)) \in \{1, 2\}$. Дакле, треба да испитамо следеће две могућности:
• $\varphi(b)$ је реда 1
У овом случају је φ тривијалан хомоморфизам, па се полудиректан производ своди на директан. Добијамо

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{2p}.$$

• $\varphi(b)$ је реда 2
Како је $H \cong \mathbb{Z}_p$, имамо да је група $\operatorname{Aut} H$ изоморфна Ојлеровој групи $\Phi(p)$. Пошто је број p је прост, Ојлерова група $\Phi(p)$ је циклична. То значи да у њој постоји тачно један елемент реда 2 и њега можемо препознати као аутоморфизам $f : H \to H$, $f(x) = x^{-1}, x \in H$. Према томе, у овом случају је $\varphi(b) = f$. Полудиректан производ $H \rtimes_\varphi K$ генерисан је елементима (a, e) и (e, b) чији су редови p, односно 2. Такође, важи

$$\begin{aligned}(a,e)(e,b)(a,e)(e,b) &= (a\varphi(e)(e), eb)(a\varphi(e)(e), eb)\\ &= (a,b)(a,b)\\ &= (a\varphi(b)(a), b^2)\\ &= (af(a), e)\\ &= (aa^{-1}, e)\\ &= (e,e).\end{aligned}$$

После увођења идентификације $\rho \leftrightarrow (a, e)$ и $\sigma \leftrightarrow (e, b)$ добијамо $\rho\sigma\rho\sigma = e$ тј. $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$, што нам даје презентацију групе G:

$$G = \langle \rho, \sigma \mid \rho^p = e, \sigma^2 = e, \rho\sigma = \sigma\rho^{-1} \rangle \cong \mathbb{D}_p.$$

Закључујемо да, до на изоморфизам, постоје тачно две групе реда $2p$ и то су циклична група $\mathbb{Z}_{2p}$ и диедарска група $\mathbb{D}_p$.
□

Задатак 48. Нека је $H = \langle a \rangle$ циклична група реда 8 и $K = \langle b \rangle$ циклична група реда 2. Одредити колико постоји неизоморфних полудиректних производа $H \rtimes_\varphi K$.

Решење. Сви полудиректни производи $H \rtimes_\varphi K$ су у потпуности одређени хомоморфизмом $\varphi : K \to \operatorname{Aut} H$. Њих, са друге стране, у потпуности познајемо ако нам је познато $\varphi(b)$, јер је $K = \langle b \rangle$. Пошто је b реда 2 и како при хомоморфизму ред слике дели ред оригинала, имамо да $r(\varphi(b)) \in \{1, 2\}$.

Одредимо све елементе реда највише 2 у групи $\operatorname{Aut} H$. Група H је циклична, реда 8, па је $\operatorname{Aut} H \cong \Phi(8) = \{1, 3, 5, 7\}$. Због тога имамо да је и $\operatorname{Aut} H = \{f_1, f_3, f_5, f_7\}$, при чему је $f_i : H \to H$,

$$f_i(a) = a^i, \ \ i \in \{1, 3, 5, 7\}.$$

Пресликавање a_i је реда 1 у групи $\operatorname{Aut} H$, док су преостала три пресликавања реда 2, па сва долазе у обзир. Због тога раздвајамо следеће случајеве:
• $\varphi(b) = f_1$
У овом случају је φ тривијалан хомоморфизам, па се полудиректан производ своди на директан. Добијамо

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2.$$

• $\varphi(b) = f_3$
У овом случају је полудиректан производ $H \rtimes_\varphi K$ генерисан елементима (a, e) и (e, b)

чији су редови 8, односно 2. Такође, важи

$$\begin{aligned}(a,e)(e,b)(a,e)(e,b) &= (a\varphi(e)(e),eb)(a\varphi(e)(e),eb)\\ &= (a,b)(a,b)\\ &= (a\varphi(b)(a),b^2)\\ &= (af_3(a),e)\\ &= (aa^3,e)\\ &= (a^4,e).\end{aligned}$$

После увођења идентификације $\alpha \leftrightarrow (a,e)$ и $\beta \leftrightarrow (e,b)$ добијамо $\alpha\beta\alpha\beta = \alpha^4$. Тако налазимо презентацију групе G:

$$G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^8 = e, \beta^2 = e, \alpha\beta\alpha\beta = \alpha^4 \rangle.$$

• $\varphi(b) = f_5$
Слично као у претходном случају, имамо да је $H \rtimes_\varphi K$ генерисан елементима (a,e) и (e,b) чији су редови 8, односно 2. Уз то важи и

$$\begin{aligned}(a,e)(e,b)(a,e)(e,b) &= (a\varphi(e)(e),eb)(a\varphi(e)(e),eb)\\ &= (a,b)(a,b)\\ &= (a\varphi(b)(a),b^2)\\ &= (af_5(a),e)\\ &= (aa^5,e)\\ &= (a^6,e).\end{aligned}$$

После увођења идентификације $\alpha \leftrightarrow (a,e)$ и $\beta \leftrightarrow (e,b)$ добијамо $\alpha\beta\alpha\beta = \alpha^6$. Тако налазимо презентацију групе G:

$$G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^8 = e, \beta^2 = e, \alpha\beta\alpha\beta = \alpha^6 \rangle.$$

• $\varphi(b) = f_7$
У овом случају је све исто као у претходним, једино што за релацију имамо:

$$\begin{aligned}(a,e)(e,b)(a,e)(e,b) &= (a\varphi(e)(e),eb)(a\varphi(e)(e),eb)\\ &= (a,b)(a,b)\\ &= (a\varphi(b)(a),b^2)\\ &= (af_7(a),e)\\ &= (aa^7,e)\\ &= (a^8,e)\\ &= (e,e).\end{aligned}$$

После увођења идентификације $\rho \leftrightarrow (a,e)$ и $\sigma \leftrightarrow (e,b)$ добијамо $\rho\sigma\rho\sigma = e$ тј. $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$, што нам даје презентацију групе G:

$$G = \langle \rho, \sigma \mid \rho^8 = e, \sigma^2 = e, \rho\sigma = \sigma\rho^{-1} \rangle \cong \mathbb{D}_8.$$

Закључујемо да, до на изоморфизам, постоји 4 различита полудиректна производа $H \rtimes_\varphi K$.
□

Задатак 49. Одредити, до на изоморфизам, све групе реда 28.

Решење. Нека је $|G| = 28$. Из треће теореме Силова имамо:

$$\left.\begin{array}{ll} s_7 \equiv 1 \pmod 7 \\ s_7 \mid 4 \end{array}\right\} \longrightarrow s_7 = 1.$$

Закључујемо да је јединствену S_7 подгрупу H од G нормална. Како је $|H| = 7$, знамо и да је H циклична, $H \cong \mathbb{Z}_7$, па можемо писати $H = \langle a \rangle$ за неко $a \in H$ реда 7.

Уочимо још произвољну S_2 подгрупу K од G. Она је реда 4, па из Лагранжеве теореме имамо

$$|H \cap K| \mid |H|, |K| \quad \text{тј.} \quad |H \cap K| \mid 7, 4.$$

Закључујемо да је $|H \cap K| = 1$, односно $H \cap K = \{e\}$. Одатле следи и $|HK| = |H||K| = 7 \cdot 4 = 28 = |G|$. Пошто је $HK \leq G$, закључујемо да је $HK = G$. Дакле, имамо да је $H \lhd G$, $H \cap K = \{e\}$ и $HK = G$, па на основу Тврђења 4.2 следи да је $G \cong H \rtimes_\varphi K$ за неки хомоморфизам $\varphi : K \to \operatorname{Aut} H$.

Остаје још да одредимо све могућности за хомоморфизам φ. Како је група K реда 4, она може бити или циклична или изоморфна Клајновој групи $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. У складу са тим раздвајамо на два случаја:

1. случај: $K \cong \mathbb{Z}_4$
У овом случају можемо писати да је $K = \langle b \rangle$ за неки елемент b реда 4. Хомоморфизам φ је онда у потпуности одређен сликом $\varphi(b)$. Пошто при хомоморфизму ред слике дели ред оригинала, закључујемо да $r(\varphi(b)) \in \{1, 2, 4\}$, чиме долазимо до наредног даљег рачвања:
• $\varphi(b)$ је реда 1
У овом случају је φ тривијалан хомоморфизам, па се полудиректан производ своди на директан. Добијамо

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{28}.$$

• $\varphi(b)$ је реда 2
Како је $H \cong \mathbb{Z}_7$, имамо да је група $\operatorname{Aut} H$ изоморфна Ојлеровој групи $\Phi(7)$. Пошто је број 7 је прост, Ојлерова група $\Phi(7)$ је циклична. То значи да у њој постоји тачно један елемент реда 2 и њега можемо препознати као аутоморфизам $f : H \to H$, $f(x) = x^{-1}, x \in H$. Према томе, у овом случају је $\varphi(b) = f$. Полудиректан производ $H \rtimes_\varphi K$ генерисан је елементима (a, e) и (e, b) чији су редови 7, односно 4. Такође, важи

$$\begin{aligned}(a,e)(e,b)(a,e)(e,b^3) &= (a\varphi(e)(e), eb)(a\varphi(e)(e), eb^3) \\ &= (a,b)(a,b^3) \\ &= (a\varphi(b)(a), b^4) \\ &= (af(a), e) \\ &= (aa^{-1}, e) \\ &= (e,e).\end{aligned}$$

После увођења идентификације $\alpha \leftrightarrow (a, e)$ и $\beta \leftrightarrow (e, b)$ добијамо $\alpha\beta\alpha\beta^3 = e$, што нам даје презентацију групе G:

$$G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^7 = e, \beta^4 = e, \alpha\beta\alpha\beta^3 = e \rangle.$$

• $\varphi(b)$ је реда 4
Овај случај није могућ, јер у групи $\operatorname{Aut} H \cong \Phi(7)$ нема елемената реда 4.

2. случај: $K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
У овом случају можемо писати $K = \{e, b, c, bc\}$, где су b и c два елементи реда 2 који међусобно комутирају. Хомоморфизам φ је онда у потпуности одређен сликама $\varphi(b)$ и $\varphi(c)$. Пошто при хомоморфизму ред слике дели ред оригинала, закључујемо да $r(\varphi(b)) \in \{1, 2\}$ и $r(\varphi(c)) \in \{1, 2\}$. Већ смо видели да је једини елемент реда 2 у $\operatorname{Aut} H$ аутоморфизам f, па имамо наредно рачвање у зависности од тога да ли су $\varphi(b)$ и $\varphi(c)$ једнаки идентичком пресликавању или аутоморфизму f:
• $\varphi(b) = \mathrm{id}_H$ и $\varphi(c) = \mathrm{id}_H$
У овом случају је φ тривијалан хомоморфизам, па се полудиректан производ своди на директан. Добијамо

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}.$$

• $\varphi(b) = f$ и $\varphi(c) = f$
Означимо $\rho = (a, bc)$ и $\sigma = (e, c)$. Тада је

$$\rho^2 = (a, bc)(a, bc) = (a\varphi(bc)(a), (bc)^2) = (a(\varphi(b)\varphi(c))(a), e) = (a(f^2)(a), e) = (a^2, e).$$

Закључујемо да је $(\rho^2)^7 = \rho^{14} = (a^{14}, e) = (e, e)$.

Слично је

$$\sigma^2 = (e, c)(e, c) = (e\varphi(c)(e), c^2) = (e, e)$$

и

$$\begin{aligned}
\rho\sigma\rho\sigma &= (a, bc)(e, c)(a, bc)(e, c) \\
&= (a\varphi(bc)(e), bc^2)(a\varphi(bc)(e), bc^2) \\
&= (a, b)(a, b) \\
&= (a\varphi(b)(a), b^2) \\
&= (af(a), e) \\
&= (aa^{-1}, e) \\
&= (e, e).
\end{aligned}$$

На тај начин добијамо презентацију групе G

$$G = \langle \rho, \sigma \mid \rho^{14} = e, \sigma^2 = e, \rho\sigma = \sigma\rho^{-1} \rangle \cong \mathbb{D}_{14}.$$

• $\varphi(b) = f$ и $\varphi(c) = \mathrm{id}_H$
У овом случају је $\varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c) = f$. Због тога се овај случај своди на претходни када уместо генератора b и c за K посматрамо генераторе b и bc те групе.

• $\varphi(b) = \mathrm{id}_H$ и $\varphi(c) = f$
И у овом случају имамо да је $\varphi(bc) = \varphi(b)\varphi(c) = f$, па посматрајући генераторе c и bc групе K поново долазимо до тога да је $G \cong \mathbb{D}_{14}$.

Дакле, добили смо да, до на изоморфизам, постоји 4 групе реда 28 и то су Абелове групе $\mathbb{Z}_{28}$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}$, диедарска група $\mathbb{D}_{14}$ и група чија је презентација $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^7 = e, \beta^4 = e, \alpha\beta\alpha\beta^3 = e \rangle$.
□

Задатак 50. Одредити, до на изоморфизам, све групе реда 30.

Решење. Нека је $|G| = 30$. Из Треће теореме Силова имамо:

$$\left.\begin{array}{ll} s_2 \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 2) \\ s_2 \mid 15 & \end{array}\right\} \longrightarrow s_2 \in \{1, 3, 5, 15\}$$
$$\left.\begin{array}{ll} s_3 \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 3) \\ s_3 \mid 10 & \end{array}\right\} \longrightarrow s_3 \in \{1, 10\}$$
$$\left.\begin{array}{ll} s_5 \equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ s_5 \mid 6 & \end{array}\right\} \longrightarrow s_5 \in \{1, 6\}.$$

Докажимо да мора бити $s_3 = 1$ или $s_5 = 1$. У супротном је $s_3 = 10$ и $s_5 = 6$. Означимо са H_i све S_3 подгрупе и са K_i све S_5 подгрупе од G. Тада је $|H_i| = 3$ и $|K_i| = 5$. Имамо и следеће:

- $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$ за све i и j
  Важи да је $H_i \cap K_j$ подгрупа од H_i и K_j, па на основу Лагранжеве теореме следи
  $$|H_i \cap K_j| \mid |H_i|, |K_j| \quad \text{тј.} \quad |H_i \cap K_j| \mid 3, 5.$$
  Како су бројеви 3 и 5 узајамно прости, следи $|H_i \cap K_j| = 1$ тј. $H_i \cap K_j = \langle e \rangle$.

- $H_i \cap H_j = K_i \cap K_j = \langle e \rangle$ за све $i \neq j$
  Важи да је $H_i \cap H_j$ подгрупа и од H_i и од H_j. Како су H_i и H_j обе реда 3, њихове једине подгрупе су тривијална подгрупа $\langle e \rangle$ и оне саме. Пошто је $H_i \neq H_j$, друго је немогуће, па следи $H_i \cap H_j = \langle e \rangle$. Потпуно слично радимо и за $K_i \cap K_j$.

Означимо са $\mathcal{S}$ скуп елемената из G који се налазе у некој од погрупа H_i или K_i. Тада је $\mathcal{S} \subseteq G$, па имамо $|\mathcal{S}| \leq |G|$. Са друге стране, пошто се све подгрупе H_i и K_i међусобно секу тривијално, добијамо да је

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| &= s_3(3-1) + s_5(5-1) + 1 \\ &= 10 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 1 \\ &= 45 > |G|. \end{aligned}$$

Добијена контрадикција показује да је $s_3 = 1$ или $s_5 = 1$. То значи да је барем једна од S_3 или S_5 подгрупа јединствена, а тиме и нормална у G.

Ако сада уочимо једну S_3 подгрупу P и једну S_5 подгрупу Q од G, имамо да је барем једна од њих нормална у G. Због тога је и $H := PQ$ подгрупа од G. Из већ установљеног $P \cap Q = \{e\}$ следи да је $|H| = |P||Q| = 15$. Закључујемо да је $H \triangleleft G$ као подгрупа индекса 2. Такође, пошто су 3 и 5 прости бројеви такви да $3 \nmid 5 - 1$, из Задатка 23 следи да је подгрупа H циклична. Зато имамо $H \cong \mathbb{Z}_{15}$ и можемо писати $H = \langle a \rangle$ за неки елемент a реда 15 из H.

Уочимо још, користећи Кошијеву лему, елемент b реда 2 у G и посматрајмо цикличну подгрупу $K = \langle b \rangle$. Тада је $|K| = 2$, па из Лагранжеве теореме имамо

$$|H \cap K| \mid |H|, |K| \quad \text{тј.} \quad |H \cap K| \mid 15, 2.$$

Закључујемо да је $|H \cap K| = 1$, односно $H \cap K = \{e\}$. Одатле следи и $|HK| = |H||K| = 15 \cdot 2 = 30 = |G|$. Пошто је $HK \leq G$, закључујемо да је $HK = G$. Дакле, имамо да је $H \triangleleft G$, $H \cap K = \{e\}$ и $HK = G$, па на основу Тврђења 4.2 следи да је $G \cong H \rtimes_\varphi K$ за неки хомоморфизам $\varphi : K \to \operatorname{Aut} H$.

Остаје још да одредимо све могућности за хомоморфизам φ. Због чињенице да је $K = \langle b \rangle$ имамо да је хомоморфизам φ у потпуности одређен са $\varphi(b)$. При томе је b реда 2, па како при хомоморфизму ред слике дели ред оригинала, закључујемо да $r(\varphi(b)) \in \{1, 2\}$. Дакле, треба да испитамо следеће две могућности:

• $\varphi(b)$ је реда 1

У овом случају је φ тривијалан хомоморфизам, па се полудиректан производ своди на директан. Добијамо

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{30}.$$

• $\varphi(b)$ је реда 2

Како је $H \cong \mathbb{Z}_{15}$, имамо да је група $\operatorname{Aut} H$ изоморфна Ојлеровој групи $\Phi(15) = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$. Елементи реда 2 у $\Phi(15)$ су $4, 11$ и 14. Због тога су елементи реда 2 у $\operatorname{Aut} H$ аутоморфизми f_1, f_2 и f_3 одређени редом са $f_1 : a \to a^4$, $f_2 : a \to a^{11}$ и $f_3 : a \to a^{14}$. Тако долазимо до наредна три случаја:

1) $\varphi(b) = f_1$

У овом случају је полудиректан производ $H \rtimes_\varphi K$ генерисан елементима (a, e) и (e, b) чији су редови 15, односно 2. Такође, важи

$$\begin{aligned}(a,e)(e,b)(a,e)(e,b) &= (a\varphi(e)(e), eb)(a\varphi(e)(e), eb)\\ &= (a,b)(a,b)\\ &= (a\varphi(b)(a), b^2)\\ &= (af_1(a), e)\\ &= (aa^4, e)\\ &= (a^5, e).\end{aligned}$$

После увођења идентификације $\alpha \leftrightarrow (a, e)$ и $\beta \leftrightarrow (e, b)$ добијамо $\alpha\beta\alpha\beta = \alpha^5$. Тако налазимо презентацију групе G:

$$G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^{15} = e, \beta^2 = e, \alpha\beta\alpha\beta = \alpha^5 \rangle.$$

• $\varphi(b) = f_2$

Слично као у претходном случају, имамо да је $H \rtimes_\varphi K$ генерисан елементима (a, e) и

(e,b) чији су редови 8, односно 2. Уз то важи и

$$\begin{aligned}(a,e)(e,b)(a,e)(e,b) &= (a\varphi(e)(e),eb)(a\varphi(e)(e),eb)\\ &= (a,b)(a,b)\\ &= (a\varphi(b)(a),b^2)\\ &= (af_2(a),e)\\ &= (aa^{11},e)\\ &= (a^{12},e).\end{aligned}$$

После увођења идентификације $\alpha \leftrightarrow (a,e)$ и $\beta \leftrightarrow (e,b)$ добијамо $\alpha\beta\alpha\beta = \alpha^5$. Тако налазимо презентацију групе G:

$$G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^{15} = e, \beta^2 = e, \alpha\beta\alpha\beta = \alpha^{12}\rangle.$$

• $\varphi(b) = f_3$
У овом случају је све исто као у претходним, једино што за релацију имамо:

$$\begin{aligned}(a,e)(e,b)(a,e)(e,b) &= (a\varphi(e)(e),eb)(a\varphi(e)(e),eb)\\ &= (a,b)(a,b)\\ &= (a\varphi(b)(a),b^2)\\ &= (af_3(a),e)\\ &= (aa^{14},e)\\ &= (a^{15},e)\\ &= (e,e).\end{aligned}$$

После увођења идентификације $\rho \leftrightarrow (a,e)$ и $\sigma \leftrightarrow (e,b)$ добијамо $\rho\sigma\rho\sigma = e$ тј. $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$, што нам даје презентацију групе G:

$$G = \langle \rho, \sigma \mid \rho^{15} = e, \sigma^2 = e, \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}\rangle \cong \mathbb{D}_{15}.$$

Закључујемо да, до на изоморфизам, постоји 4 групе реда 30 и то су циклична група $\mathbb{Z}_{30}$, диедарска група $\mathbb{D}_{15}$, као и две групе чије су презентације редом $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^{15} = e, \beta^2 = e, \alpha\beta\alpha\beta = \alpha^5\rangle$ и $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^{15} = e, \beta^2 = e, \alpha\beta\alpha\beta = \alpha^{12}\rangle$.
□

Задатак 51. Доказати да није могуће сваку групу представити као полудиректни производ неких њених правих подгрупа.

Решење. Посматрајмо групу кватерниона $\mathbb{K}_8$. То је неабелова група реда 8, значајна по томе што је свака њена подгрупа нормална. Због тога би се сваки полудиректни производ њених подгрупа сводио на директни. Праве подгрупе од $\mathbb{K}_8$ су реда 2 или 4, па су обавезно Абелове, што значи да би се као сваки њихов полудиректан производ морала добити Абелова група. Према томе, немогуће је да групу $\mathbb{K}_8$ представимо као такав полудиректан производ, чиме добијамо тражени контрапример.
□

Задатак 52. Нека је $K = \langle a \rangle$ циклична група реда 2 и $H = \{b^i c^j \mid 0 \leq i, j \leq 3\} = \langle b, c \mid b^3 = c^3 = e, bc = cb \rangle$ група изоморфна $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Посматрајмо аутоморфизам f групе H дефинисан са $f(b) = c$ и $f(c) = b$ тј. $f(b^i c^j) = b^j c^i$ и хомоморфизам $\varphi : K \to \operatorname{Aut} H$ одређен са $\varphi(a) = f$. Доказати да је $H \rtimes_\varphi K \cong \mathbb{D}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Решење. Ради лакшег сналажења, погледајмо прво како функционише операција у групи $H \rtimes_\varphi K$. За све $0 \leq i, j, u, v \leq 3$ и $m \in \{0, 1\}$ имамо

$$\begin{aligned}
(b^i c^j, e)(b^u c^v, a^m) &= (b^i c^j \varphi(e)(b^u c^v), a^m) \\
&= (b^i c^j b^u c^v, a^m) \\
&= (b^{i+u} c^{j+v}, a^m) \\
(b^i c^j, a)(b^u c^v, a^m) &= (b^i c^j \varphi(a)(b^u c^v), a^{m+1}) \\
&= (b^i c^j f(b^u c^v), a^{m+1}) \\
&= (b^i c^j c^u b^v, a^{m+1}) \\
&= (b^{i+v} c^{j+u}, a^{m+1}).
\end{aligned}$$

Посматрајмо сада пресликавање $\alpha : H \rtimes_\varphi K \to \mathbb{Z}_3$ дефинисано са

$$\alpha(b^i c^j, a^k) = i + j, \quad 0 \leq i, j \leq 3, k \in \{0, 1\}.$$

Како за све $0 \leq i, j, u, v \leq 3$ и $k, m \in \{0, 1\}$ важи

$$\begin{aligned}
\alpha\left((b^i c^j, a^k)(b^u c^v, a^m)\right) &= \begin{cases} \alpha(b^{i+u} c^{j+v}, a^m), & \text{ако је } k = 0 \\ \alpha(b^{i+v} c^{j+u}, a^{m+1}), & \text{ако је } k = 1 \end{cases} \\
&= i + j + u + v \\
&= \alpha(b^i c^j, a^k) + \alpha(b^u c^v, a^m),
\end{aligned}$$

имамо да је α хомоморфизам група. Његово језгро је

$$\begin{aligned}
\ker \alpha &= \{(b^i c^j, a^k) \mid i + j = 0\} \\
&= \{(e, e), (e, a), (bc^2, e), (bc^2, a), (b^2 c, e), (b^2 c, a)\}.
\end{aligned}$$

Означимо $\rho = (bc^2, e)$ и $\sigma = (e, a)$. Тада је $\rho^3 = e$ и $\sigma^2 = e$, као и

$$\begin{aligned}
\rho\sigma\rho\sigma &= (bc^2, e)(e, a)(bc^2, e)(e, a) \\
&= (bc^2 \varphi(e)(e), a)(bc^2 \varphi(e)(e), a) \\
&= (bc^2, a)(bc^2, a) \\
&= (bc^2 \varphi(a)(bc^2), a^2) \\
&= (bc^2 f(bc^2), e) \\
&= (b^3 c^3, e) \\
&= (e, e).
\end{aligned}$$

Како ρ и σ генеришу $\ker\alpha$, добијамо

$$\ker\alpha = \langle \rho, \sigma \mid \rho^3 = e, \sigma^2 = e, \rho\sigma\rho\sigma = e \rangle \cong \mathbb{D}_3.$$

Уочимо још елемент $\theta = (bc, e)$ реда 3 и означимо $M = \langle\theta\rangle$. Тада је

$$M = \{(e,e), (bc,e), (b^2c^2, e)\} \cong \mathbb{Z}_3.$$

Одмах имамо да је $\ker\alpha \cap M = \{(e,e)\}$, па је $|\ker\alpha M| = |\ker\alpha||M| = 6 \cdot 3 = 18 = |H \rtimes_\varphi K|$. Према томе, важи $\ker\alpha M = H \rtimes_\varphi K$. Коначно, можемо још приметити да се елемент θ налази у центру групе $H \rtimes_\varphi K$, па је и $M = \langle\theta\rangle$ садржана у центру те групе. Специјално, добијамо да је $M \lhd H \rtimes_\varphi K$.

Да сумирамо, имамо $\ker\alpha \lhd H \rtimes_\varphi K$, $M \lhd H \rtimes_\varphi K$, $\ker\alpha \cap M = \{(e,e)\}$ и $\ker\alpha M = H \rtimes_\varphi K$. На основу теореме о разлагању коначно следи

$$H \rtimes_\varphi K \cong \ker\alpha \times M \cong \mathbb{D}_3 \times \mathbb{Z}_3.$$

□

5 Прстени

5.1 Дефиниција и основне особине прстена

Дефиниција 5.1. Прстен је алгебарска структура $(P, +, \cdot)$, где је P непразан скуп, а $+$ и $\cdot$ бинарне операција на P такве да важи

1. Структура $(P, +)$ је Абелова група:
   - За све $x, y, z \in P$ важи $(x + y) + z = x + (y + z)$.
   - Постоји елемент $0 \in P$ такав да за све $x \in P$ важи $x + 0 = 0 + x = x$.
   - За свако $x \in P$ постоји $-x \in P$ такво да је $x + (-x) = -x + x = 0$.
   - За све $x, y \in P$ важи $x + y = y + x$.
2. Операција $\cdot$ је асоцијативна:
   - За све $x, y, z \in P$ важи $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
3. Дистрибутивност $\cdot$ према $+$:
   - За све $x, y, z \in P$ важи $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ и $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Дефиниција 5.2. Прстен $(P, +, \cdot)$ у коме постоји елемент $1 \in P$ такав да за све $x \in P$ важи $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ се назива прстен са јединицом.

Дефиниција 5.3. Прстен $(P, +, \cdot)$ такав да за све $x, y \in P$ важи $x \cdot y = y \cdot x$ се назива комутативни прстен.

Надаље ћемо се бавити само комутатитвним прстенима са јединицом и ако не нагласимо другачије, под термином прстен ће се подразумевати комутативни прстен са јединицом.

Дефиниција 5.4. Комутатитвни прстен са јединицом $(P, +, \cdot)$ у коме је $0 \neq 1$ и за свако $x \in P \setminus \{0\}$ постоји $x^{-1} \in P$ такво да је $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ се назива поље.

Задатак 53. Нека је $C(\mathbb{R})$ скуп непрекидних реалних функција реалне променљиве на коме су дефинисане операције сабирања и множења са

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x), \;\; f, g \in C(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}.$$

Доказати да је $C(\mathbb{R})$ комутативни прстен са јединицом у односу на ове операције.

Решење. За почетак имамо да је збир и производ две непрекидне функције такође непрекидна функција, па су операција сабирања и одузимања које посматрамо коректно дефинисане. Уочимо произвољне $f, g, h \in C(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\begin{aligned}(f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x),\end{aligned}$$

па следи $f + (g + h) = (f + g) + h$.

Дефинишимо функцију $\mathbf{0} \in C(\mathbb{R})$ са $\mathbf{0}(x) = 0$ за све $x \in \mathbb{R}$. Онда за све $x \in \mathbb{R}$ важи

$$(f+\mathbf{0})(x) = f(x)+\mathbf{0}(x) = f(x)+0 = f(x) \;\text{ и }\; (\mathbf{0}+f)(x) = \mathbf{0}(x)+f(x) = 0+f(x) = f(x),$$

што показује да је $\mathbf{0}$ неутрал за операцију $+$.

За сваку функцију $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ можемо дефинисати функцију $-f \in C(\mathbb{R})$ са $(-f)(x) = -f(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$. Онда за све $x \in \mathbb{R}$ важи

$$(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}(x) \;\text{ и }\; (-f + f)(x) = -f(x) + f(x) = 0 = \mathbf{0}(x),$$

што показује да је $-f$ инверз за проивољно f при операцији $+$.

Додатно, за све $f, g \in C(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$ важи

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x),$$

што даје $f + g = g + f$.

Приметимо још да за произвољне $f, g, h \in C(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$ имамо

$$\begin{aligned}(f \cdot (g \cdot h))(x) &= f(x) \cdot (g \cdot h)(x) \\ &= f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) \\ &= (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) \\ &= (f \cdot g)(x) \cdot h(x) \\ &= ((f \cdot g) \cdot h)(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((f+g)\cdot h))(x) &= (f+g)(x)\cdot h(x)\\ &= (f(x)+g(x))\cdot h(x)\\ &= f(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h(x)\\ &= (f\cdot h)(x)+(g\cdot h)(x)\\ &= (f\cdot h+g\cdot h)(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f\cdot(g+h))(x) &= f(x)\cdot(g+h)(x)\\ &= f(x)\cdot(g(x)+h(x))\\ &= f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot h(x)\\ &= (f\cdot g)(x)+(f\cdot h)(x)\\ &= (f\cdot g+f\cdot h)(x),\end{aligned}$$

одакле следи $f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h$, $(f+g)\cdot h=f\cdot h+g\cdot h$ и $f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h$. Дакле, доказали смо да је $C(\mathbb{R})$ прстен.

Пошто за све $f,g\in C(\mathbb{R})$ и $x\in\mathbb{R}$ важи

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)=(g\cdot f)(x),$$

имамо $f\cdot g=g\cdot f$. Тиме је показано да је прстен $C(\mathbb{R})$ комутативан.

Коначно, можемо дефинисати функцију $\mathbf{1}\in C(\mathbb{R})$ са $\mathbf{1}(x)=1$ за све $x\in\mathbb{R}$. Онда је

$$(f\cdot\mathbf{1})(x)=f(x)\cdot\mathbf{1}(x)=f(x)\cdot 1=f(x)\quad\text{и}\quad(\mathbf{1}\cdot f)(x)=\mathbf{1}(x)\cdot f(x)=1\cdot f(x)=f(x),$$

што показује да је $\mathbf{1}$ неутрал за операцију $\cdot$. Тиме смо показали да је прстен $C(\mathbb{R})$ са јединицом и завршили задатак.
□

Задатак 54. Нека је R скуп свих матрица $\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$, где су $a,b\in\mathbb{R}$. Доказати да је R комутативни прстен са јединицом у односу на уобичајене операције сабирања и множења матрица.

Решење. Прво, за матрице $\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}c & -d\\ d & c\end{bmatrix}$ из R имамо

$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c & -d\\ d & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c & -b-d\\ b+d & a+c\end{bmatrix}\in R$$
$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & -d\\ d & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac-bd & -ad-bc\\ ad+bc & ac-bd\end{bmatrix}\in R, \tag{11}$$

што показује да су операције сабирања и множења матрица коректно дефинисане на R. Већ знамо да су је R прстен у односу на те операције, па то нећемо показивати. Све што још треба да покажемо је да је прстен R комутативан и са јединицом.

За јединицу одмах знамо да постоји– то је управо јединична матрица $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in R$. Такође, важи

$$\begin{bmatrix}c & -d\\ d & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac-bd & -ad-bc\\ ad+bc & ac-bd\end{bmatrix},$$

што уз (11) показује да је прстен R комутативан.
□

5.2 Потпрстени

Дефиниција 5.5. Нека је R прстен. Подскуп $A \subseteq R$ је потпрстен од R ако за све $a, b \in A$ важи:

- $a + b \in A$.
- $-a \in A$.
- $ab \in A$.
- $1 \in A$.

Задатак 55. Посматрајмо прстен $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ свих уређених парова $(a, b), a, b \in \mathbb{Z}$ у односу на операције

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d)\\ (a, b)(c, d) &= (ac, bd), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Доказати да је $A = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ потпрстен од $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Решење. За произвољне (a, a) и (b, b) из A имамо

$$\begin{aligned}(a, a) + (b, b) &= (a + b, a + b) \in A\\ -(a, a) &= (-a, -a) \in A\\ (a, a)(b, b) &= (ab, ab) \in A\\ (1, 1) &\in A,\end{aligned}$$

одакле следи да је A потпрстен од $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
□

Задатак 56. Нека је $S = \{x2^y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Показати да је S потпрстен поља реалних бројева $\mathbb{R}$.

Решење. Уочимо произвољне елементе $z_1 = x_1 2^{y_1}$ и $z_2 = x_2 2^{y_2}$ из S. По дефиницији су онда $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$. Означимо са $m = \min\{y_1, y_2\}$. Тада имамо

$$z_1 + z_2 = x_1 2^{y_1} + x_2 2^{y_2} = 2^m \left(x_1 2^{y_1 - m} + x_2 2^{y_2 - m}\right).$$

Свакако је $m \in \mathbb{Z}$, а такође због $m \leq y_1, y_2$ важи и $x_1 2^{y_1 - m} + x_2 2^{y_2 - m} \in \mathbb{Z}$. Одатле закључујемо да $z_1 + z_2 \in S$. Слично је онда и

$$\begin{aligned}-z_1 &= (-x_1)2^{y_1} \in S\\ z_1 z_2 &= x_1 2^{y_1} x_2 2^{y_2} = (x_1 x_2) 2^{y_1 + y_2} \in S\\ 1 &= 1 \cdot 2^0 \in S,\end{aligned}$$

чиме је показано да је S потпрстен од $\mathbb{R}$.
□

5.3 Хомоморфизми прстена

Дефиниција 5.6. Нека су R и S два прстена. Пресликавање $f : R \to S$ такво да за све $x, y \in R$ важи

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(xy) = f(x)f(y)$
- $f(1) = 1$

се назива хомоморфизам прстена.

Слично као у теорији група, сурјективни хомоморфизмам се назива епиморфизам, инјективни хомоморфизам се назива мономорфизам или утапање, док се бијективни хомоморфизам назива изоморфизам. Ако постоји изоморфизам између нека два прстена R и S за њих се каже да су изоморфни и пише се $R \cong S$.

Нека је $f : R \to S$ хомоморфизам прстена. Дефинишемо:

$$\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0\} \quad \text{језгро хомоморфизма } f.$$
$$\operatorname{im} f = \{f(a) \mid a \in R\} \quad \text{слика хомоморфизма } f.$$

Слично као и код група, имамо:

$$f \text{ је 1-1 ако и само ако је } \ker f = \{0\}.$$
$$f \text{ је на ако и само ако је } \operatorname{im} f = S.$$

Задатак 57. Посматрајмо пресликавање $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{R}$ дефинисано са $f(p(X)) = p(\sqrt{2})$, $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Доказати да је f хомоморфизам прстена.

Решење. Уочимо произвољне полиноме $p(X)$ и $q(X)$ из $\mathbb{Z}[X]$, као и мултипликативни неутрал $\mathbf{1}(X) \equiv 1$ тог прстена. Тада је

$$f((p+q)(X)) = (p+q)(\sqrt{2}) = p(\sqrt{2}) + q(\sqrt{2}) = f(p(X)) + f(q(X))$$
$$f((p \cdot q)(X)) = (p \cdot q)(\sqrt{2}) = p(\sqrt{2}) \cdot q(\sqrt{2}) = f(p(X)) \cdot f(q(X))$$
$$f(\mathbf{1}(X)) = 1,$$

чиме је показано да је f хомоморфизам.
□

Задатак 58. Дати су прстен $R_1 = \left\{a + b\frac{1+\sqrt{13}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ у односу на сабирање и множење реалних бројева и прстен $R_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 3b & a+b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ у односу на сабирање и множење матрица. Доказати да је $R_1 \cong R_2$.

Решење. Посматрајмо пресликавање $\phi : R_1 \to R_2$ дефинисано са

$$\phi\left(a + b\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 3b & a+b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Ово пресликавање је очигледно сурјективно. Докажимо да је хомоморфизам.

За произвољне $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ важи

$$\phi\left(a+b\frac{1+\sqrt{13}}{2}+c+d\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)=\phi\left(a+c+(b+d)\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$
$$=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 3(b+d) & a+c+b+d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ 3b & a+b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & d \\ 3d & c+d \end{bmatrix}$$
$$=\phi\left(a+b\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)+\phi\left(c+d\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right),$$

$$\phi\left(\left(a+b\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(c+d\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\right)=\phi\left(ac+(ad+bc)\frac{1+\sqrt{13}}{2}++bd\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2\right)$$
$$=\phi\left(ac+3bd+(ad+bc+bd)\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)=\begin{bmatrix} ac+3bd & ad+bc+bd \\ 3(ad+bc+bd) & ac+3bd+ad+bc+bd \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a & b \\ 3b & a+b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 3d & c+d \end{bmatrix}=\phi\left(a+b\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\phi\left(c+d\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right),$$

$$\phi(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

што показује да је ϕ хомоморфизам.

Остаје само још да покажемо да је ϕ инјективно пресликавање. То можемо урадити директно по дефиницији, а можемо и показати да је $\ker\phi=\{0\}$, што је у овом случају једноставније. Имамо

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \left\{a+b\frac{1+\sqrt{13}}{2}\in R_1 \mid \phi\left(a+b\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{a+b\frac{1+\sqrt{13}}{2}\in R_1 \mid \begin{bmatrix} a & b \\ 3b & a+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{a+b\frac{1+\sqrt{13}}{2}\in R_1 \mid a=b=0\right\} \\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

Закључујемо да је ϕ изоморфизам, чиме добијамо тражено $R_1 \cong R_2$.
□

5.4 Идеали и количнички прстени

Дефиниција 5.7. Подскуп I прстена R се назива идеал и означава $I \triangleleft R$ ако важи:

- за све $x, y \in I : x + y \in I$
- за све $x \in I$ и $a \in R : ax \in I$.

Дефиниција 5.8. Коначан скуп $S = \{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subseteq R$ генерише идеал I прстена R ако се сваки елемент из I може записати у облику $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n$ за неке $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$. У том случају пишемо $I = \langle S \rangle$.

Дефиниција 5.9. Идеал I прстена R је главни ако је генерисан само једним елементом из R, $I = \langle a \rangle$ за неко $a \in R$.

Задатак 59. Посматрајмо прстен полинома $\mathbb{Z}[X]$ и у њему подскуп

$$I = \{2f(X) + Xg(X) \mid f(X), g(X) \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

Показати да је I идеал прстена $\mathbb{Z}[X]$. Да ли је тај идеал главни?

Решење. Покажимо прво да је I идеал. Уочимо произвољне $u(X)$ и $v(X)$ из I. Тада постоје полиноми $f_1(X), f_2(X), g_1(X), g_2(X) \in \mathbb{Z}[X]$ такви да је

$$u(X) = 2f_1(X) + Xg_1(X)$$
$$v(X) = 2f_2(X) + Xg_2(X).$$

Одатле је

$$u(X) + v(X) = 2\underbrace{(f_1(X) + f_2(X))}_{\in\mathbb{Z}[X]} + X\underbrace{(g_1(X) + g_2(X))}_{\in\mathbb{Z}[X]} \in I.$$

Слично за произвољно $\alpha(X) \in \mathbb{Z}[X]$ имамо

$$\alpha(X)u(X) = 2\underbrace{\alpha(X)f_1(X)}_{\in\mathbb{Z}[X]} + X\underbrace{\alpha(X)g_1(X)}_{\in\mathbb{Z}[X]} \in I.$$

Овим смо показали да је I идеал прстена $\mathbb{Z}[X]$.

Остаје још да испитамо да ли је овај идеал главни. За почетак можемо приметити да је $I = \langle 2, X \rangle$. Ако би овај идеал био главни, важило би $I = \langle f(X) \rangle$ за неки полином $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Одатле би важило $\langle 2, X \rangle = \langle f(X) \rangle$, што имплицира постојање полинома $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}[X]$ таквих да важи

$$2 = f(X)a(X) \tag{12}$$
$$X = f(X)b(X). \tag{13}$$

Из (12) следи да је $f(X) = 1$ или $f(X) = 2$. Ако би било $f(X) = 2$, из (13) би следило $X = 2b(X)$, што није могуће, пошто је $b(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Дакле, остаје нам $f(X) = 1$. Онда је $I = \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}[X]$, па добијамо $\langle 2, X \rangle = \mathbb{Z}[X]$. Специјално, одатле следи да постоје полиноми $m(X), n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ такви да је

$$2m(X) + Xn(X) = 1.$$

Добијамо да мора бити $n(X) = 0$ и $2m(X) = 1$. Међутим, како је $m(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ни ово није могуће, па закључујемо да идеал I није главни.
□

Задатак 60. Посматрајмо комутативни потпрстен $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -5b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ прстена матрица $M_2(\mathbb{Z})$.

а) Доказати да је $I = \left\{ \begin{bmatrix} 5a & b \\ -5b & 5a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ идеал прстена K.

б) Доказати да је $I = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Решење. а) Уочимо произвољне елементе $\begin{bmatrix} 5a & b \\ -5b & 5a \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 5c & d \\ -5d & 5c \end{bmatrix}$ из I, као и $\begin{bmatrix} m & n \\ -5n & m \end{bmatrix}$ из K. Тада је

$$\begin{bmatrix} 5a & b \\ -5b & 5a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5c & d \\ -5d & 5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(a+c) & b+d \\ -5(b+d) & 5(a+c) \end{bmatrix} \in I$$

$$\begin{bmatrix} m & n \\ -5n & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5a & b \\ -5b & 5a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5am - 5bn & bm + 5an \\ -25an - 5bm & -5bn + 5am \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(am - bn) & bm + 5an \\ -5(bn + 5an) & 5(am - bn) \end{bmatrix} \in I.$$

Из добијеног следи да је I идеал прстена K.

б) Приметимо да за произвољно $\begin{bmatrix} a & b \\ -5b & a \end{bmatrix} \in K$ важи

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -5b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5b & a \\ -5a & -5b \end{bmatrix}.$$

Због тога, за произвољно $\begin{bmatrix} 5a & b \\ -5b & 5a \end{bmatrix} \in I$ имамо

$$\begin{bmatrix} 5a & b \\ -5b & 5a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \\ 5a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},$$

чиме је показано да важи $I = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

□

Задатак 61. Посматрајмо прстен Гаусових целих $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ у односу на операције сабирања и множења комплексних бројева. Доказати да сваки идеал тог прстена различит од $\{0\}$ садржи неки ненула цео број.

Решење. Нека је $I \neq \{0\}$ неки идеал прстена $\mathbb{Z}[i]$. Тада постоји елемент $z \neq 0$ који се налази у I. Његов компексни конјугат $\overline{z}$ свакако не мора бити у I, али се налази у $\mathbb{Z}[i]$, па из чињенице да је I идеал следи $\overline{z}z = |z|^2 \in I$. Пошто су и реални и имагинарни део од z цели бројеви, добијамо да је $|z|^2 \neq 0$ један цео број који се налази у I.

□

Количнички прстен

Нека је I идеал прстена R. На скупу $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$ свих левих косета дефинишемо операције сабирања и множења са:

- $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$
- $(a+I)\cdot(b+I)=ab+I,\ \ a,b\in R.$

Уз овако дефинисане операције R/I је комутативни прстен са јединицом који се назива количнички прстен прстена R по идеалу I.

Приметимо да је у прстену R/I неутрал за операцију сабирања I, а за операцију множења $1+I$.

Слично као и код група, веома применљив метод одређивања количничког прстена је коришћење Прве теореме о изоморфизму.

Теорема 5.10 (Прва теорема о изоморфизму прстена)**.** Нека је $f : R \to S$ хомоморфизам прстена. Тада је $\ker f$ један идеал прстена R и важи

$$R/\ker f \cong \operatorname{im} f.$$

Од интереса ће нам бити две класе идеала описане наредним дефиницијама.

Дефиниција 5.11. Идеал I прстена R је прост ако за све $a, b \in R$ из $ab \in I$ следи $a \in I$ или $b \in I$.

Дефиниција 5.12. Идеал I прстена R је максималан ако није садржан ни у једном правом[1] идеалу од R.

У вези простих идеала, значајан ће нам бити појам домена који је описан у наредној дефиницији.

Дефиниција 5.13. Прстен R је домен ако у њему нема правих делитеља нуле тј. ако за све $a, b \in R$ из $ab = 0$ следи $a = 0$ или $b = 0$.

Пример 5.14. Посматрајмо поље F и претпоставимо да за неке $a, b \in F$ важи $ab = 0$. Ако је $a \neq 0$ онда у F постоји инверз a^{-1} за a, па добијамо

$$a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 \longrightarrow b = 0.$$

Закључујемо да у пољу нема правих делитеља нуле, па је свако поље домен.
□

Приметимо да директно на основу Дефиниција 5.11 и 5.12 није баш једноставно испитати да ли је неки идеал прост/максималан. Посао нам знатно може олакшати наредно тврђење.

Тврђење 5.15.

- Идеал I прстена R је прост ако и само ако је количнички прстен R/I домен.
- Идеал I прстена R је максималан ако и само ако је количнички прстен R/I поље.

Пошто је свако поље домен, одмах имамо наредну последицу.

[1] прави идеал прстена R је сваки идеал тог прстена различит од $\{0\}$ и R

Последица. Сваки максималан идеал је прост.

Задатак 62. Посматрајмо прстен $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ у односу на множење и сабирање матрица.

а) Доказати да је подскуп $J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{Q} \right\}$ идеал прстена R.

б) Доказати да је $R/J \cong \mathbb{Q}$.

Решење. За произвољне матрице $\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ из J и $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ из R важи

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in J$$
$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in J.$$

Одатле закључујемо да је J идеал прстена R.

б) Посматрајмо пресликавање $\phi : R \to \mathbb{Q}$ дефинисано са

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) = a, \ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in R.$$

Ово пресликавање је очигледно на. Такође, за произвољне матрице $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}$ из R важи

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) &= \phi\left(\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c \end{bmatrix} \right) \\ &= a + c = \phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) + \phi\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \\ \phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) &= \phi\left(\begin{bmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{bmatrix} \right) \\ &= ac = \phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) \phi\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \\ \phi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 1. \end{aligned}$$

Одатле закључујемо да је ϕ хомоморфизам прстена.

Из Прве теореме о изоморфизму онда следи

$$R/\ker\phi \cong \mathbb{Q}.$$

Одредимо још $\ker\phi$:

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\in R \mid \phi\left(\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\right)=0\right\}\\ &= \left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\in R \mid a=0\right\}\\ &= \left\{\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix} \mid b\in\mathbb{Q}\right\}=J.\end{aligned}$$

Дакле, добијамо тражено $R/J\cong\mathbb{Q}$.
□

Задатак 63. Нека је S прстен реалних функција реалне променљиве у односу на операције сабирања и множења тачку по тачку и $I=\{f\in S \mid f(0)=0\}$ један подскуп од S.
а) Показати да је I идеал прстена S
б) Испитати да ли је идеал I прост/максималан.

Решење. а) Уочимо произвољне функције $f,g\in I$. Тада је $f(0)=g(0)=0$. Одатле следи

$$(f+g)(0)=f(0)+g(0)=0+0=0,$$

па добијамо да је $f+g\in I$. Слично, за произвољну функцију $\alpha\in S$ имамо

$$(\alpha f)(0)=\alpha(0)f(0)=\alpha(0)\cdot 0=0,$$

па је $\alpha f\in I$. Тиме је показано да је I идеал прстена S.
б) Посматрајмо пресликавање $\phi: S\to\mathbb{R}$ дефинисано са

$$\phi(f)=f(0),\ \ f\in S.$$

Како за произвољне функције $f,g\in S$ важи

$$\begin{aligned}&\phi(f+g)=(f+g)(0)=f(0)+g(0)=\phi(f)+\phi(g)\\ &\phi(fg)=(fg)(0)=f(0)g(0)=\phi(f)\phi(g)\\ &\phi(\mathbf{1})=\mathbf{1}(0)=1,\end{aligned}$$

имамо да је ϕ хомоморфизам прстена. Тај хомоморфизам је очигледно сурјективан, па на основу Прве теореме о изоморфизму следи

$$S/\ker\phi\cong\mathbb{R}.$$

Пошто је по дефиницији

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \{f\in S \mid \phi(f)=0\}\\ &= \{f\in S \mid f(0)=0\}\\ &= I,\end{aligned}$$

добијамо

$$S/I \cong \mathbb{R}.$$

Дакле, количнички прстен S/I је поље, па закључујемо да је идеал I максималан, а тиме и прост.
□

Збир и производ идеала

Нека су I и J два идеала прстена R. Тада дефинишемо њихов збир и производ редом са

$$I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$$
$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Важи да је збир и производ два идеала прстена R такође један идеал тог прстена. Приметимо и да је $I, J \subseteq I + J$, као и $IJ \subseteq I, J$. Због тога важи $I \cup J \subseteq I + J$ и $IJ \subseteq I \cap J$.

Пример 5.16. За главне идеале $\langle 6 \rangle$ и $\langle 9 \rangle$ прстена целих бројева $\mathbb{Z}$ важи

$$\langle 6 \rangle + \langle 9 \rangle = \{6x + 9y \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{3\underbrace{(2x + 3y)}_{\in\mathbb{Z}} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \langle 3 \rangle$$
$$\begin{aligned} \langle 6 \rangle\langle 9 \rangle &= \{6x_1 \cdot 9y_1 + 6x_2 \cdot 9y_2 + \cdots + 6x_n \cdot 9y_n \mid x_i, y_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{54(\underbrace{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}_{\in\mathbb{Z}}) \mid x_i, y_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \langle 54 \rangle. \end{aligned}$$

□

Дефиниција 5.17. За два идеала I и J прстена R кажемо да су *узајамно прости* ако је $I + J = R$.

Задатак 64. Нека је I и J два узајамно проста идеала прстена R. Доказати да је тада $IJ = I \cap J$.

Решење. Како је увек испуњено $IJ \subseteq I \cap J$, све што треба да докажемо је важење обрнуте инклузије. У ту сврху уочимо произвољно $\alpha \in I \cap J$. Тада је $\alpha \in I$ и $\alpha \in J$. Из чињенице да су идеали I и J узајамно прости следи да је $I + J = R$, па, специјално, постоје елементи $x \in I$ и $y \in J$ такви да је $x + y = 1$. Онда имамо

$$\alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha x + \alpha y = x\alpha + \alpha y.$$

Са једне стране, имамо да је $x \in I$ и $\alpha \in J$, а са друге да је $\alpha \in I$ и $y \in J$, што показује да $\alpha \in IJ$. На тај начин добијамо тражену обратну инклузију и завршавамо задатак.
□

Пример 5.18. Нека су I и J два максимална идеала прстена R. Пошто је

$$I \subseteq I + J,$$

из максималности идеала I следи $I + J = R$. Дакле, свака два максимална идеала су узајамно проста.

На пример, ако су p и q два различита проста броја, онда су главни идеали $\langle p \rangle$ и $\langle q \rangle$ прстена $\mathbb{Z}$ узајамно прости, јер су максимални (њихова максималност следи из чињенице да су количнички прстени $\mathbb{Z}/\langle p \rangle$ и $\mathbb{Z}/\langle q \rangle$ изоморфни коначним пољима са p, односно q елемената).
□

Задатак 65. Нека су I и J два узајамно проста идеала прстена R. Доказати да је тада

$$R/(IJ) \cong R/I \times R/J.$$

Решење. Посматрајмо пресликавање $\phi : R \to R/I \times R/J$, дефинисано са $\phi(x) = (x + I, x + J)$, $x \in R$. Како за произвољне $x, y \in R$ важи

$$\begin{aligned}
\phi(x + y) &= ((x + y) + I, (x + y) + J) \\
&= (x + I + y + I, x + J + y + J) \\
&= (x + I, x + J) + (y + I, y + J) \\
&= \phi(x) + \phi(y) \\
\phi(xy) &= ((xy) + I, (xy) + J) \\
&= ((x + I)(y + I), (x + J)(y + J)) \\
&= (x + I, x + J)(y + I, y + J) \\
&= \phi(x)\phi(y) \\
\phi(1) &= (1 + I, 1 + J),
\end{aligned}$$

закључујемо да је ϕ хомоморфизам прстена.

Покажимо да је ово пресликавање сурјективно. Уочимо произвољан елемент $(x + I, y + J) \in R/I \times R/J$. Пошто су идеали I и J узајамно прости, важи $I + J = R$, па можемо писати

$$\begin{aligned}
x &= x_i + x_j \\
y &= y_i + y_j
\end{aligned}$$

за неке $x_i, y_i \in I$ и $x_j, y_j \in J$. Онда је $x + I = (x_i + x_j) + I = x_j + I$ и $y + J = (y_i + y_j) + J = y_i + J$. За елемент $x_j + y_i \in R$ даље важи

$$\phi(x_j + y_i) = ((x_j + y_i) + I, (x_j + y_i) + J) = (x_j + I, y_i + J) = (x + I, y + J),$$

чиме смо показали сурјективност хомоморфизма ϕ.

Одредимо још његово језгро. По дефиницији је

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \{x \in R \mid \phi(x) = (I, J)\} \\ &= \{x \in R \mid (x + I, x + J) = (I, J)\} \\ &= \{x \in R \mid x + I = I, x + J = J\} \\ &= \{x \in R \mid x \in I, x \in J\} \\ &= I \cap J.\end{aligned}$$

Како су идеали I и J узајамно прости, важи $I \cap J = IJ$, па на основу Прве теореме о изоморфизму добијамо тражено

$$R/(IJ) \cong R/I \times R/J.$$

□

5.5 Еуклидски домени

Дефиниција 5.19. Домен D је *еуклидски* ако постоји функција $N : D\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ таква за свако $a \in D$ и $b \in D \setminus \{0\}$ постоје q и r из D за које важи

$$a = bq + r, \text{ при чему је } r = 0 \text{ или } N(r) < N(b).$$

Функција N се назива *еуклидска норма* на D.

Из претходне дефиниције видимо да су еуклидски домени они у којима се може извршити дељење са остатком. Онда је у тим доменима могуће спровести и Еуклидов алгоритам да се одредити НЗД два елемента[2], па отуда и њихов назив.

Пример 5.20. Прстен целих бројева $\mathbb{Z}$ је еуклидски домен, јер је на њему еуклидска норма функција апсолутне вредности (целог) броја.
□

Пример 5.21. Прстен полинома са једном неодређеном $F[X]$ над произвољним пољем F је еуклидски домен. Еуклидска норма на њему је функција deg која сваком полиному додељује његов степен.

Нагласимо још и да је претходно не мора да важи ако F није поље. Нпр, како је

$$X^2 + 1 = \frac{1}{2}X \cdot (2X) + 1,$$

имамо да у прстену $\mathbb{Z}[X]$ не можемо поделити полиноме $X^2 + 1$ и $2X$ са остатком (количник $\frac{1}{2}X$ не припада $\mathbb{Z}[X]$).
□

Пример 5.22. Прстен Гаусових целих $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ у односу са сабирање и множење комплексних бројева је еуклидски домен. Еуклидска норма на њему је дефинисана са $N(a + bi) = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$.
□

[2] НЗД два елемената може постојати у доменима који нису еуклидски, али га је у том случају много теже одредити у пракси.

Пример 5.23. Означимо $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Прстен Ајзенштајнових целих $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ у односу са сабирање и множење комплексних бројева је еуклидски домен. Еуклидска норма на њему је дефинисана са $N(a + bi) = a^2 - ab + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$. □

Задатак 66. Показати да је количнички прстен $\mathbb{Z}[X, Y]/\langle 2, X\rangle$ један еуклидски домен.

Решење. Посматрајмо пресликавање $\psi : \mathbb{Z}[X, Y] \to \mathbb{Z}_2[Y]$ дефинисано са

$$\psi(f(X, Y)) = f(0, Y) \pmod 2, \;\; f(X, Y) \in R[X, Y],$$

где је $\pmod 2$ ознака за узимање остатка при дељењу са 2 свих коефицијената одговарајућег полинома.

Дефинисано пресликавање је на, пошто за свако $g(Y) \in \mathbb{Z}_2[Y]$ можемо дефинисати $f(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ са $f(X, Y) = g(Y)$ и онда је $\psi(f(X, Y)) = f(0, Y) \pmod 2 = g(Y) \pmod 2 = g(Y)$.

Покажимо да је ψ хомоморфизам прстена. За произвољне $f_1(X, Y)$ и $f_2(X, Y)$ из $\mathbb{Z}[X, Y]$ важи

$$\begin{aligned}
\psi((f_1 + f_2)(X, Y)) &= (f_1 + f_2)(0, Y) \pmod 2 \\
&= (f_1(0, Y) + f_2(0, Y)) \pmod 2 \\
&= f_1(0, Y) \pmod 2 +_2 f_2(0, Y) \pmod 2 \\
&= \psi(f_1(X, Y)) +_2 \psi(f_2(X, Y)) \\
\psi((f_1 f_2)(X, Y)) &= (f_1 f_2)(0, Y) \pmod 2 \\
&= (f_1(0, Y) \cdot f_2(0, Y)) \pmod 2 \\
&= f_1(0, Y) \pmod 2 \cdot_2 f_2(0, Y) \pmod 2 \\
&= \psi(f_1(X, Y)) \cdot_2 \psi(f_2(X, Y)) \\
\psi(\mathbf{1}(X, Y)) &= \mathbf{1}(0, Y) \pmod 2 = \mathbf{1}(Y).
\end{aligned}$$

Закључујемо да ψ јесте хомоморфизам прстена. Одредимо још његово језгро. Важи:

$$\begin{aligned}
\ker \psi &= \{f(X, Y) \mid \psi(f(X, Y)) = \mathbf{0}(Y)\} \\
&= \{f(X, Y) \mid f(0, Y) \pmod 2 = \mathbf{0}(Y)\} \\
&= \{f(X, Y) \mid 2 | f(X, Y) \text{ или } f(0, Y) = 0 \text{ за све } Y\} \\
&= \{f(X, Y) \mid 2 | f(X, Y) \text{ или } X | f(X, Y)\} \\
&= \langle 2, X\rangle.
\end{aligned}$$

Из Прве теореме о изоморфизму прстена онда следи

$$\mathbb{Z}[X, Y]/\langle 2, X\rangle \cong \mathbb{Z}_2[Y].$$

Приметимо да је коначни прстен $\mathbb{Z}_2$ једно поље, због тога што је 2 прост број. Због тога је $\mathbb{Z}_2[Y]$ еуклидски домен, као прстен полинома над пољем. Према томе, посматрани количинички прстен је изоморфизан еуклидском домену, па је и сам такав. □

Дефиниција 5.24. Елемент x прстена R је *инвертибилан* или *јединични* ако постоји његов мултипликативни инверз x^{-1}.

Тврђење 5.25. Скуп свих инвертибилних елемената прстена R чини једну групу у односу на множење у прстену R. Та група се означава са $R^\times$ и назива се *група јединица* или *група инвертибилних елемената* прстена R.

Пример 5.26. Посматрајмо коначни прстен $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Инвертибилни елементи у њему су управо они бројеви из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ за које постоји инверз у односу на операцију множења по модулу n. Из теорије група знамо да су то управо елементи Ојлерове групе $\Phi(n)$. Према томе, важи $\mathbb{Z}_n^\times = \Phi(n)$.
□

Задатак 67. Одредити све инвертибилне елементе у прстену Гаусових целих $\mathbb{Z}[i]$.

Решење. Покажимо прво да је елемент $z \in \mathbb{Z}[i]$ инвертибилан ако и само ако је $N(z) = 1$. У ту сврху приметимо да еуклидска норма на $\mathbb{Z}[i]$, пошто није ништа друго до квадрат модула комплексног броја, има особину мултипликативности:

$$N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2) \quad \text{за све } z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i].$$

Са једне стране имамо да за инвертибилан $z \in \mathbb{Z}[i]$ постоји $z' \in \mathbb{Z}[i]$ такво да је $zz' = 1$. Одатле је $N(zz') = N(z)N(z') = N(1) = 1$. Како је норма по дефиницији природан број, из добијене једнакости $N(z)N(z') = 1$ следи тражено $N(z) = 1$.

Са друге стране, ако је $N(z) = 1$, поново искористивши чињеницу да је еуклидска норма на $\mathbb{Z}[i]$ квадрат модула комплексног броја, добијамо да важи $z\overline{z} = 1$. То управо значи да је $z^{-1} = \overline{z}$, па је z инвертибилан.

Из претходно урађеног закључујемо да нам преостаје само још да пронађемо све елементе норме 1 у $\mathbb{Z}[i]$. То је еквивалентно са проналажењем свих целобројних решења (a, b) једначине $a^2 + b^2 = 1$. Лако видимо да су та решења су $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 1)$, чиме добијамо $\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}$.
□

Задатак 68. Одредити НЗД$(11 + 7i, 18 - i)$ у прстену Гаусових целих $\mathbb{Z}[i]$.

Решење. Спроводимо Еуклидов алгоритам вршећи узастопна дељења са остатком слично као и у класичном случају над $\mathbb{Z}$. При томе се алгоритам завршава када стигнемо или до остатка једнаког нули или до остатка који је неки инвертибилни елемент (дакле неки од елемената $\pm 1, \pm i$ на основу претходног задатка).

Пре него што почемо прво дељење, морамо да знамо који је елемент већи да бисмо њега поделили мањим елементом. То одређујемо на основу норми

$$N(11 + 7i) = 11^2 + 7^2 = 121 + 49 = 170$$
$$N(18 - i) = 18^2 + 1^2 = 324 + 1 = 325,$$

па је за наше потребе елемент $18 - i$ већи. Сада свакако можемо поделити $18 - i$ са $11 + 7i$ у $\mathbb{C}$:

$$\frac{18 - i}{11 + 7i} = \frac{(18 - i)(11 - 7i)}{170} = \frac{191 - 137i}{170} = \frac{191}{170} - \frac{137}{170}i.$$

За количник у $\mathbb{Z}[i]$ бирамо онај елемент који је најближи броју $\frac{191}{170} - \frac{137}{170}i$. При томе је шта тачно значи "најближи" одређено управо еуклидском нормом. У прстену Гаусових целих који посматрамо норма је квадрат (уобичајеног) еуклидског растојања у $\mathbb{C}$, па ће се појам најближег поклапати са нашом интуитивном представом. То значи да ће количник у $\mathbb{Z}[i]$ бити елемент чији је реални део најближи цео број броју $\frac{191}{170}$, а имагинарни део броју $-\frac{137}{170}$. Добијамо да је тражени количник $1 - i$. Онда је остатак једнак

$$18 - i - (11 + 7i)(1 - i) = 18 - i - 11 + 11i - 7i - 7 = 3i.$$

Дакле, успели смо да поделимо са остатком у $\mathbb{Z}[i]$:

$$18 - i = (11 + 7i)(1 - i) + 3i.$$

Како нисмо добили остатак 0, нити норме 1, поступак настављамо за $11 + 7i$ и $3i$. Имамо:

$$\frac{11 + 7i}{3i} = \frac{11}{3i} + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} - \frac{11}{3}i.$$

Најближи цео број броју $\frac{7}{3}$ је 2, а броју $-\frac{11}{3}$ је -4, па је количник у $\mathbb{Z}[i]$ једнак $2 - 4i$. Остатак је онда

$$11 + 7i - 3i(2 - 4i) = 11 + 7i - 6i - 12 = -1 + i.$$

Поново нисмо добили остатак 0, нити норме 1, па поступак настављамо за $3i$ и $-1 + i$. Добијамо:

$$\frac{3i}{-1 + i} = \frac{3i(-1 - i)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Сада смо у ситуацији да постоје два подједнако удаљена цела броја броју $\frac{3}{2}$, а то су 1 и 2. Можемо се одлучити за било који од њих. Слично и за $-\frac{3}{2}$ можемо одабрати било који од бројева -1 и -2. Одаберимо зато за количник елемент $1 - i$. Остатак је онда

$$3i - (-1 + i)(1 - i) = 3i + 1 - i - i - 1 = i.$$

Приметимо да је сада норма остатка једнака 1, што завршава наш поступак, уз закључак

$$\text{НЗД}(11 + 7i, 18 - i) = i.$$

Пошто смо добили да је њихов НЗД норме 1, за елементе $11+7i$ и $18-i$ можемо казати и да су узајамно прости.
□

5.6 Главноидеалски и домени са јединственом факторизацијом

Дефиниција 5.27. Домен D је главноидеалски ако је сваки идеал у њему главни тј. генерисан само једним елементом.

Једну велику класу главноидеалских домена смо већ видели, пошто важи следеће тврђење.

Тврђење 5.28. Сваки еуклидски домен је главноидеалски.

Пример 5.29. Један пример главноидеалског домена који није еуклидски је прстен $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right] = \left\{a + b\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ у односу на сабирање множење комплексних бројева. Показати да то заиста важи је мало теже.
□

Пример 5.30. У Задатку 59 смо пронашли идеал прстена $\mathbb{Z}[X]$ који није главни. Зато $\mathbb{Z}[X]$ није главноидеалски домен.
□

Пример 5.31. Нека је F поље. Тада домен $F[X, Y]$ није главноидеалски, пошто у њему идеал $\langle X, Y\rangle$ није главни.
□

Задатак 69. Нека је D главноидеалски домен и $I_1, I_2, \ldots$ идеали у D такви да је $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$. Доказати да постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је $I_n = I_{n+1} = \ldots$.

Решење. Означимо $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ и докажимо да је I један идеал прстена D.

Уочимо произвољне $x, y \in I$. Тада постоје $m, n \in \mathbb{N}$ такви да $x \in I_m$ и $y \in I_n$. Пошто је $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$, следи да $x, y \in I_s$ за $s = \max\{m, n\}$. Како је I_s идеал прстена D, добијамо да $x + y \in I_s$, а стога и $x + y \in I$. Слично, за произвољно $\alpha \in D$, пошто је I_m идеал прстена D, следи да $\alpha x \in I_m$. Због тога и $\alpha x \in I$.

Тиме је показано да је I идеал прстена D. Како је D главноидеалски домен, следи да је $I = \langle a\rangle$ за неко $a \in I$. Означимо са n најмањи природан број n такав да $a \in I_n$ (тај број постоји из дефиниције идеала I и чињенице да је $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$). Тада имамо да за све $k \geq n$ важи $I_k = I_n = I$, што завршава задатак.
□

Дефиниција 5.32. За елемент x прстена R кажемо да дели елемент $y \in R$ и пишемо $x|y$ ако постоји $t \in R$ такав да је $y = tx$.

Дефиниција 5.33. Ненула, неинвертибилни елемент p прстена R је *прост* ако за свако $a, b \in R$ из услова $p|ab$ следи $p|a$ или $p|b$.

Дефиниција 5.34. Ненула, неинвертибилни елемент x прстена R је *нерастављив* ако за све $a, b \in R$ такве да је $x = ab$ важи $a \in R^\times$ или $b \in R^\times$.

Задатак 70. Нека је D домен. Доказати да је сваки прост елемент у D нерастављив.

Решење. Нека је $p \in D$ произвољан прост елемент и претпоставимо да је $p = ab$ за неке $a, b \in D$. Тада, специјално $p|ab$, па како је p прост, имамо $p|a$ или $p|b$. Без умањења општости можемо претпоставити да $p|a$. Тиме добијамо да важи $a = pt$ за неко $t \in D$. Почетна једнакост $p = ab$ онда постаје

$$p = ptb \quad \text{тј.} \quad p(tb - 1) = 0.$$

Како је D домен и $p \neq 0$ закључујемо да важи $tb - 1 = 0$ тј. $tb = 1$. Добијено управо показује да је b инвертибилан елемент. Дакле, из претпоставке $p = ab$ смо добили $b \in D^\times$. По дефиницији то значи баш да је елемент p нерастављив.
□

Дефиниција 5.35. Домен D је са *јединственом факторизацијом* ако се сваки елемент из D може на јединствен начин записати као производ простих елемената из D, до на њихов распоред и умножак инвертибилним елементима.

Слично као и за главноидеалске домене, већ нам је позната и велика класа домена са јединственом факторизацијом, пошто важи следеће тврђење.

Тврђење 5.36. Сваки главноидеалски домен је домен са јединственом факторизацијом.

Пример 5.37. Као што смо већ видели у Примеру 5.31, прстен полинома $F[X,Y]$ са две неодређене над пољем F није главноидеалски домен. Међутим, то јесте један домен са јединственом факторизацијом, што је последица општијег тврђења по коме је прстен полинома $D[X]$ над доменом са јединственом факторизацијом D и сам домен са јединственом факторизацијом. Наиме, $F[X,Y]$ можемо видети као прстен полинома над $F[X]$, за кога знамо да еуклидски, а тиме и домен са јединственом факторизацијом. □

Пример 5.38. Домен $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] = \left\{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ у односу на сабирање множење комплексних бројева није са јединственом факторизацијом. Један пример вишезначне факторизације у том прстену је

$$6 = 2 \cdot 3 \quad \text{и} \quad 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

□

Задатак 71. Нека је D домен са јединственом факторизацијом. Доказати да је произвољан елемент у D прост ако и само ако је нерастављив.

Решење. Из Задатка 70 знамо да је сваки прост елемент нерастављив (у сваком домену), па само још треба да докажемо да у домену са јединственом факторизацијом важи и обрнуто.

Уочимо произвољан нерастављив елемент $x \in D$ и претпоставимо да $x|ab$ за неке $a, b \in D$. Тада постоји елемент $c \in D$ такав да је $ab = cx$. Искористимо чињеницу да је D домен са јединственом факторизацијом да запишемо елементе a, b и c у облику производа простих, $a = a_1 a_2 \dots a_m$, $b = b_1 b_2 \dots b_n$ и $c = c_1 c_2 \dots c_r$. Тако добијамо

$$a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n = c_1 c_2 \dots c_r x.$$

Нерастављивост елемента x и јединственост претходне факторизације онда повлаче да је x једнак неком од a_i или b_i, евентуално помноженом са неким елементом из $D^\times$. То значи да $x|a$ или $x|b$, чиме је показано да је елемент x прост.
□

Задатак 72. Нека је D главноидеалски домен. Доказати да је елемент $a \in D$ нерастављив ако и само ако је главни идеал $\langle a \rangle$ максималан.

Решење. Нека је $a \in D$ нерастављив. Претпоставимо да идеал $\langle a \rangle$ није максималан. Тада постоји прави идеал I у D такав да је $\langle a \rangle \subseteq I$. Како је домен D главноидеалски

важи $I = \langle b \rangle$ за неко $b \in D$, па имамо $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$. Одатле је $a \in \langle b \rangle$, па важи $a = bx$ за неко $x \in D$. Нерастављивост елемента x онда повлачи $b \in D^\times$ или $x \in D^\times$. У првом случају је $I = \langle b \rangle = D$, а другом је $I = \langle b \rangle = \langle a \rangle$, што показује да је идеал $\langle a \rangle$ максималан.

Претпоставимо сада обратно, нека је главни идеал $\langle a \rangle$ максималан и нека је $a = bc$ за неке b и c из D, од којих ниједан није инвертибилан. Тада је $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$, при чему је $\langle b \rangle$ прави идеал домена D, различит од $\langle a \rangle$. Добијамо контрадикцију са максималношћу идеала $\langle a \rangle$, па следи да барем један од елемената b или c мора бити инвертибилан. То управо значи да је a нерастављив елемент.
□

Задатак 73. Показати да је количнички прстен $\mathbb{Z}_3[X]/\langle 2X^3 + X + 1 \rangle$ једно поље и одредити број његових елемената.

Решење. Посматрани количнички прстен је поље ако и само ако је главни идеал $\langle 2X^3 + X + 1 \rangle$ максималан. Како је $\mathbb{Z}_3$ поље, важи да је прстен $\mathbb{Z}_3[X]$ еуклидски, а тиме и главноидеалски домен. Из претходног задатка онда следи да је главни идеал $\langle 2X^3 + X + 1 \rangle$ максималан ако и само ако је полином $f(X) = 2X^3 + X + 1$ нерастављив над $\mathbb{Z}_3$. Овде имамо једну олакшавајућу околност– полином $f(X)$ је степена (највише) 3, па ће он бити нерастављив над $\mathbb{Z}_3$ ако и само ако нема нула над $\mathbb{Z}_3$. То није тешко да проверимо:

$$f(0) = 1, f(1) = 2 \cdot 1 + 1 + 1 = 1, f(2) = 2 \cdot 2^3 + 2 + 1 = 1.$$

Закључујемо да је полином $f(X)$ нерастављив над $\mathbb{Z}_3$, па је количнички прстен $\mathbb{Z}_3[X]/\langle 2X^3 + X + 1 \rangle$ једно поље.

Одредимо још број елемената тог поља. По дефиницији је

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_3[X]/\langle 2X^3 + X + 1 \rangle &= \mathbb{Z}_3[X]/\langle f(X) \rangle = \{g(X) + \langle f(X) \rangle \mid g(X) \in \mathbb{Z}_3[X]\} \\
&= \{q(X)f(X) + r(X) + \langle f(X) \rangle \mid q(X), r(X) \in \mathbb{Z}_3[X], \deg r(X) < 3\} \\
&= \{r(X) + \langle f(X) \rangle \mid r(X) \in \mathbb{Z}_3[X], \deg r(X) < 3\} \\
&= \left\{a + bX + cX^2 + \langle f(X) \rangle \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3\right\}.
\end{aligned}$$

Закључујемо да посматрано поље има $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ елемената. □

Задатак 74. Одредити све елементе $a \in \mathbb{Z}_3$ за које је количнички прстен $\mathbb{Z}_3[X]/\langle X^3 + X^2 + aX + 1 \rangle$ поље.

Решење. Посматрани количнички прстен је поље ако и само ако је главни идеал $\langle X^3 + X^2 + aX + 1 \rangle$ максималан. Слично као у претходном задатку, то питање се своди на питање нерастављивости полинома $f(X) = X^3 + X^2 + aX + 1$ над $\mathbb{Z}_3$. Пошто је полином $f(X)$ степена 3, и у овом случају је довољно да нађемо све вредности $a \in \mathbb{Z}_3$ за које тај полином нема нула над $\mathbb{Z}_3$. Имамо:

$f(0) = 1 \ \rightarrow$ ово је у реду.
$f(1) = 3 + a = a \ \rightarrow$ ово је различито од нуле за $a \neq 0$.
$f(2) = 8 + 4 + 2a + 1 = 2a + 1 \ \rightarrow$ ово је различито од нуле за $a \neq 1$.

Закључујемо да постоји само једна тражена вредност и то је $a = 2$.
□

6 Поља

Дефиниција 6.1. Нека је F поље, а 0 и 1 редом стандардно редом означени адитивни, односно мултипликативни неутрали тог поља. Посматрајмо низ елемената поља F

$$1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ 1+1+1+1,\ldots$$

Ако се у овом низу не појављује 0, каже се да је F поље карактеристике 0 и пише се $\operatorname{char} F = 0$. У супротоном, постоји најмањи природан број n такав да је

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}} = 0.$$

У овом случају се каже да се F поље карактеристике n и пише се $\operatorname{char} F = n$.

Пример 6.2. Поља рационалних бројева $\mathbb{Q}$, реалних бројева $\mathbb{R}$ и комплексних бројева $\mathbb{C}$ су карактеристике 0.
□

Пример 6.3. Нека је p прост број. Коначно поље $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ кога ћемо краће означавати са $\mathbb{F}_p$ је карактеристике p. Генерално, свако коначно поље има карактеристику > 0.
□

Пример 6.4. Један пример бесконачног поља ненула карактеристике је поље рационалних функција $\mathbb{F}_p(X)$ над коначним пољем $\mathbb{F}_p$. Елементи тог поља су све функције облика $\frac{f(X)}{g(X)}$, $f(X), g(X) \in \mathbb{F}_p[X]$, $g(X) \neq 0$ и операције сабирања и множења су дефинисане са

$$\frac{f_1(X)}{g_1(X)} + \frac{f_2(X)}{g_2(X)} = \frac{f_1(X)g_2(X) + f_2(X)g_1(X)}{g_1(X)g_2(X)}$$
$$\frac{f_1(X)}{g_1(X)} \cdot \frac{f_2(X)}{g_2(X)} = \frac{f_1(X)f_2(X)}{g_1(X)g_2(X)},\ \frac{f_1(X)}{g_1(X)}, \frac{f_2(X)}{g_2(X)} \in \mathbb{F}_p(X).$$

Карактеристика овог поља једнака је карактеристики поља $\mathbb{F}_p$– дакле p.
□

Задатак 75. Нека је F поље такво да је $\operatorname{char} F > 0$. Доказати да постоји прост број p такав да је $\operatorname{char} F = p$.

Решење. Нека је $\operatorname{char} F = n$. Из претпоставке имамо да је $n > 0$ и оно што ћемо показати је да природан број n прост. Претпоставимо супротно, нека је број n сложен. Тада постоје природни бројеви $1 < m, k < n$ такви да је $n = mk$. Пошто је $\operatorname{char} F = n$, из дефиниције карактеристике поља имамо да је

$$\underbrace{1+1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}} = 0.$$

Због $n = mk$ ту једнакост можемо записати и као

$$(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{m \text{ пута}}) \cdot (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k \text{ пута}}) = 0.$$

Како је у пољу производ два елемента једнак нули ако и само ако је барем један од њих једнак нули, из последње једнакости следи да је

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{m \text{ пута}} = 0 \quad \text{или} \quad \underbrace{1+1+\cdots+1}_{k \text{ пута}} = 0.$$

Позивајући се поново на дефиницију карактеристике поља, последња дисјункција имплицира да је $\operatorname{char} F \leq m$ или $\operatorname{char} F \leq k$. Пошто је $m, k < n$ обе могућности су у контрадикцији са чињеницом да је $\operatorname{char} F = n$. Добијена контрадикција показује да је немогуће да је број n сложен, па n мора бити прост, чиме је задатак завршен.
□

Дефиниција 6.5. Нека су K и F два поља. Пресликавање $\varphi : K \to F$ је хомоморфизам (поља) ако је испуњено:

- $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$
- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ за све $x, y \in K$
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ за све $x, y \in K$.

Потпуно аналогно као у теорији група и прстена, за инјективни хомоморфизам поља се каже да је *мономорфизам* или *утапање*, сурјективни хомоморфизам је *епиморфизам*, док се бијективни хомоморфизам назива *изоморфизмом*.

Задатак 76. Нека је $\varphi : K \to F$ хомоморфизам поља. Доказати да је φ инјективно пресликавање. Другим речима, сви хомоморфизми поља су утапања.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је $\varphi : K \to F$ хомоморфизам поља који није инјективан. Тада постоје различити елементи $x, y \in K$ такви да је $\varphi(x) = \varphi(y)$. Онда је и $\varphi(x) - \varphi(y) = 0$, па користећи чињеницу да је φ хомоморфизам добијамо да важи $\varphi(x - y) = 0$.

Са друге стране, како је $x \neq y$, то је и $x - y \neq 0$, па постоји $(x - y)^{-1}$. Поново користећи чињеницу да је φ хомоморфизам добијамо

$$\begin{aligned} 1 = \varphi(1) &= \varphi\big((x-y)(x-y)^{-1}\big) \\ &= \varphi(x-y)\varphi\big((x-y)^{-1}\big) \end{aligned}$$

Из већ успостављеног $\varphi(x - y) = 0$ онда следи да је

$$1 = 0 \cdot \varphi\big((x-y)^{-1}\big) = 0.$$

Дакле, добијамо да је $0 = 1$ у пољу F, што је контрадикција, чиме је задатак завршен.
□

Уколико постоји барем један изоморфизам $\varphi : K \to F$ за поља K и F се каже да су *изоморфна*, што се означава са $K \cong F$. Изоморфизам $\varphi : K \to K$ се назива *аутоморфизмом* поља K. Скуп свих аутоморфизама неког поља K је група у односу на операцију композиције пресликавања, коју означавамо са $\operatorname{Aut}(K)$.

Задатак 77. Нека су K и F два поља таква да $\mathbb{Q} \subseteq K, F$ и $f : K \to F$ хомоморфизам. Доказати да је $f\big|_{\mathbb{Q}}$ идентичко пресликавање на $\mathbb{Q}$.

Решење. Прво је свакако, пошто је f хомоморфизам поља, испуњено $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. За свако $n \in \mathbb{N}$ имамо онда

$$\begin{aligned} f(n) &= f(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}}) \\ &= \underbrace{f(1)+f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{n \text{ пута}}, \quad \text{јер је } f \text{ хомоморфизам} \\ &= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ пута}} \\ &= n. \end{aligned}$$

Ако је $n < 0$ цео број, онда је $-n$ природан број, па је

$$\begin{aligned} f(n) &= f(-(-n)) \\ &= -f(-n), \quad \text{јер је } f \text{ хомоморфизам} \\ &= -(-n) \\ &= n. \end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је за све целе бројеве n испуњено $f(n) = n$.

Нека је сада n цео број различит од нуле. Из рачуна

$$\begin{aligned} 1 = f(1) &= f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \\ &= f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{јер је } f \text{ хомоморфизам} \\ &= nf\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

следи да је $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Коначно, за произвољан рационалан број x постоје цели бројеви m и $n \neq 0$ такви да је $x = \frac{m}{n}$. Онда је

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{m}{n}\right) \\ &= f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{јер је } f \text{ хомоморфизам} \\ &= m \cdot \frac{1}{n} \\ &= x. \end{aligned}$$

Закључујемо да је $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{Q}$, што значи да је $f\big|_{\mathbb{Q}}$ идентичко пресликавање. □

Последица. Нека је K поље такво да $\mathbb{Q} \subseteq K$ и $f \in \operatorname{Aut} K$. Тада је $f\big|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Специјално, $\operatorname{Aut} \mathbb{Q} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}\}$.

Задатак 78. Показати да је $\operatorname{Aut}\mathbb{R} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$.

Решење. Нека је $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}$ произвољан аутоморфизам. На основу претходне Последице директно следи да је $f\big|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Покажимо да функција f поседује и наредне две значајне особине:
$\odot$ f је монотоно растућа
Нека су $x < y$ произвољни реални бројеви. Тада постоји $t > 0$ такво да је $y = x + t^2$, одакле је

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x + t^2) \\ &= f(x) + f(t^2) \\ &= f(x) + f(t)^2 \\ &> f(x) \quad (f(t) \neq 0, \text{ јер је } f(0) = 0 \text{ и } f \text{ бијекција}) \end{aligned}$$

$\odot$ f је непрекидна (на целом $\mathbb{R}$)
Нека су $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ произвољни. Постоји природан број n такав да је $\frac{1}{n} < \varepsilon$. За сваки реалан број x који испуњава услов $|x - x_0| < \frac{1}{n}$ онда важи:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n} < x - x_0 &< \frac{1}{n} \\ f\left(-\frac{1}{n}\right) < f(x - x_0) &< f\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{јер је } f \text{ растућа} \\ -\frac{1}{n} < f(x) - f(x_0) &< \frac{1}{n}, \quad \text{јер је } f\big|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \\ -\varepsilon < f(x) - f(x_0) &< \varepsilon \\ |f(x) - f(x_0)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Да сумирамо, добили смо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = 1/n > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

што по дефиницији значи непрекидност функције f у тачки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Коначно, како је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, једнака идентичком пресликавању на свуда густом скупу $\mathbb{Q}$ у $\mathbb{R}$, следи да је $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Према томе, $\operatorname{Aut}\mathbb{R} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$.
□

Дефиниција 6.6. За подскуп F поља K каже се да је *потпоље* поља K ако је испуњено:

- $0, 1 \in F$
- за све $x, y \in F$ важи да су $x + y$ и $-x$ у скупу F
- за све $x, y \in F$ важи да су $x \cdot y \in F$ и x^{-1} у скупу F.

Чињеница да је F потпоље поља K означава се са $F \leq K$.

У ситуацији када је F потпоље поља K много чешће се користи израз да је K раширење поља F, што се кратко означава са K/F. Кључна за изучавање поља ће нам бити следећа једноставна особина: Ако је K/F раширење поља, онда је K векторски простор над F. Ова особина омогућава да се доста теорије поља изрази једноставним језиком линеарне алгебре.

Дефиниција 6.7. Степен раширења поља K над пољем F се дефинише као димензија за K посматраног као векторски простор над F,

$$[K : F] = \dim_F K.$$

Претходна дефиниција нам омогућава да уведемо једну једноставну класификацију раширења поља: за раширење K/F кажемо да је коначно (бесконачно) ако је степен раширења $[K : F]$ коначан (бесконачан). Надаље ћемо се бавити само коначним раширењима поља.

Пример 6.8. Раширење поља $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ је бесконачно. Ово следи из чињенице да је $\mathbb{R}$ непребројив скуп, а сваки коначно димензиони векторски простор над $\mathbb{Q}$ мора бити пребројив. Из истог разлога је и раширење $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ бесконачно.

Са друге стране, пошто се сваки комплексни број може на јединствен начин записати у облику $x+iy$, где су $x, y \in \mathbb{R}$, имамо да је скуп $\{1, i\}$ једна база за $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$. Због тога је $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, па је, специјално, раширење $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ коначно.
□

Пример 6.9. Нека је F коначно поље. Јасно је да је немогуће да то поље буде карактеристике нула, па постоји прост број p такав да је $\operatorname{char} F = p$. То значи да је

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{p \text{ пута}} = 0,$$

па можемо уочити потпоље $\{0, 1, 1+1, \ldots, \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{p-1 \text{ пута}}\}$ поља F изоморфно пољу $\mathbb{F}_p$. Другим речима, поље F можемо видети као коначно раширење поља $\mathbb{F}_p$. Ако је степен раширења $[F : \mathbb{F}_p] = n$, пошто је $|\mathbb{F}_p| = p$, следи да је $|F| = p^n$. Дакле, добили смо да коначна поља морају имати број елемената једнак степену неког простог броја. То наравно не омогућава да одмах закључимо да за сваки степен неког простог броја постоји поље са толико елемената. Међутим, оно што омогућава је да препознамо све природне бројеве n за које не постоји поље са n елемената. Тако, на пример, не постоји поље са 6 елемената, пошто број 6 није степен ниједног простог броја.
□

Посматрајмо сада неко коначно раширење поља K/F и уочимо произвољни елемент $a \in K$. Дефинишемо два подскупа од K:

$$F[a] = \{f(a) \mid f(X) \in F[X]\}$$
$$F(a) = \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \mid f(X), g(X) \in F[X], g(a) \neq 0 \right\}.$$

Важи да је $F[a]$ комутативни прстен са јединицом и $F(a)$ поље.

Задатак 79. Посматрајмо домен целих $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

а) Показати да је $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

б) Показати да је $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ поље.

в) Одредити степен раширења $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}]$.

г) Одредити групу $\operatorname{Aut}\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Решење. а) По дефиницији је $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{f(\sqrt{2}) \mid f \in \mathbb{Q}[X]\}$. Одатле је јасно да је

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \supseteq \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

па је све што треба да покажемо друга инклузија. Уочимо произвољно $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Тада постоји полином $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ такав да је $z = f(\sqrt{2})$. Када распишемо

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0, \;\; a_i \in \mathbb{Q}, a_n \neq 0$$

добијамо да је

$$z = a_n(\sqrt{2})^n + a_{n-1}(\sqrt{2})^{n-1} + \cdots + a_1(\sqrt{2}) + a_0.$$

Групишући чланове са парним индексима $0 \leq i \leq n$, као и оне са непарним добијамо

$$z = (a_0 + 2a_2 + 4a_4 + \dots) + \sqrt{2}(a_1 + 2a_3 + 4a_5 + \dots).$$

Како су сви бројеви a_i рационални, такви су и бројеви $a_0 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$ и $a_1 + 2a_3 + 4a_5 + \dots$, па можемо записати

$$z = a + b\sqrt{2},$$

где су $a, b \in \mathbb{Q}$. На тај начин добијамо да $z \in \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, чиме је показана и инклузија

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

а тиме и завршен први део.

б) Пошто знамо да је $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ домен целих, да би смо показати да је поље, све што треба да покажемо је да за свако ненула $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ постоји мултипликативни инверз. Због дела а) можемо произвољно $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $z \neq 0$ записати у облику $z = a + b\sqrt{2}$ за неке $a, b \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Одатле је

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{a + b\sqrt{2}} \\ &= \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Пошто су бројеви a и b рационални, такви су и бројеви $A = \frac{a}{a^2-2b^2}$ и $B = \frac{-b}{a^2-2b^2}$ (и наравно, $a^2 - 2b^2$ не може бити једнако нули због $a^2 + b^2 \neq 0$). Закључујемо да је

$$z^{-1} = A + B\sqrt{2}, \;\; A, B \in \mathbb{Q},$$

што значи да $z^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Тиме је показано да је $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ поље.
в) Из дела а) имамо да скуп $\{1, \sqrt{2}\}$ генерише $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ над пољем $\mathbb{Q}$. Ако покажемо да је тај скуп линеарно независан над $\mathbb{Q}$, добићемо да чини једну базу за $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ над $\mathbb{Q}$, па следи да је $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 2$.

Претпоставимо да постоје рационални бројеви c_1 и c_2 такви да је

$$c_1 + c_2\sqrt{2} = 0.$$

Ако је било који од c_1 и c_2 једнак нули, онда такав мора бити и други, па можемо сматрати да су ти бројеви различити од нуле. Тако добијамо да је

$$\sqrt{2} = -\frac{c_1}{c_2} \in \mathbb{Q},$$

а то је контрадикција. Дакле, мора бити $c_1 = c_2 = 0$, што значи да је скуп $\{1, \sqrt{2}\}$ линеарно независан над $\mathbb{Q}$. Одатле закључујемо и тражено

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 2.$$

г) Нека је $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ и $z = a + b\sqrt{2}$ произвољан елемент поља $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Тада је

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a + b\sqrt{2}) \\ &= f(a) + f(b)f(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Како је $f\big|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ и $a, b \in \mathbb{Q}$ имамо да је $f(a) = a$ и $f(b) = b$, па остаје

$$f(z) = a + b \cdot f(\sqrt{2}).$$

Из последњег израза можемо закључити да је аутоморфизам f у потпуности одређен вредношћу $f(\sqrt{2})$. Приметимо да је испуњено $f(2) = 2$, одакле следи

$$\begin{aligned} 2 &= f(2) \\ &= f\big((\sqrt{2})^2\big) \\ &= f(\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Према томе, за вредност $f(\sqrt{2})$ имамо две могућности:

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad \text{или} \quad f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

Тим могућностима су одређена и два кандидата за елементе групе $\operatorname{Aut}\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,

$$f_1 : a + b\sqrt{2} \to a + b\sqrt{2} \quad \text{и} \quad f_2 : a + b\sqrt{2} \to a - b\sqrt{2}. \tag{14}$$

Пресликавање f_1 је једнако $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}$, па свакако јесте аутоморфизам поља $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. За пресликавање f_2 је очигледно да је сурјективно. Такође, то пресликавање је хомоморфизам зато што за све $a + b\sqrt{2}$ и $c + d\sqrt{2}$ из $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ важи

$$\begin{aligned} f\big((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})\big) &= f\big(a + c + (b + d)\sqrt{2}\big) \\ &= a + c - \sqrt{2}(b + d) \\ &= a - b\sqrt{2} + c - d\sqrt{2} \\ &= f(a + b\sqrt{2}) + f(c + d\sqrt{2}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f\big((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\big) &= f\big(ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}\big) \\ &= ac+2bd-(ad+bc)\sqrt{2} \\ &= (a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2}) \\ &= f(a+b\sqrt{2})\cdot f(c+d\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Коначно, због Задатка 76 је онда f_2 и инјективно, па је аутоморфизам поља $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Закључујемо да је

$$\operatorname{Aut}\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{f_1, f_2\},$$

где су пресликавања f_i одређена формулама (14).
□

Дефиниција 6.10. Нека је K/F раширење поља. Елемент $a \in K$ се назива алгебарским над F ако анулира барем један полином $f(X) \in F[X]$. У супротном се a назива трансцендентним.

Пример 6.11. Елемент $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ је алгебарски над $\mathbb{Q}$ зато што анулира полином $X^2-5 \in \mathbb{Q}[X]$. Слично је и $i \in \mathbb{C}$ алгебарски над $\mathbb{Q}$ пошто анулира полином $X^2+1 \in \mathbb{Q}[X]$.

Пример 6.12. Реални бројеви e и π су трансцендентни над $\mathbb{Q}$ (ово је мало теже доказати).

Задатак 80. Нека је K/F раширење поља и $a \in K$ трансцендентан елемент над F. Показати да тада $F[a]$ није поље.

Решење. Претпоставимо супротно, нека је $F[a]$ поље. Тада, специјално, за елемент $a \in F[a]$ постоји мултипликативни инверз, $a^{-1} = f(a)$, где је $f(X) \in F[X]$. Одатле је онда $1 = af(a)$, односно $af(a) - 1 = 0$. Добијамо да a анулира полином $Xf(X) - 1 \in F[X]$, што је контрадикција са чињеницом да је a трансцендентан над пољем F. Дакле, немогуће је да $F[a]$ буде поље.

Тврђење 6.13. Нека је K/F раширење поља и $a \in K$ алгебарски елемент над F. Тада постоји јединствени полином $\mu_{a,F}(X) \in F[X]$ такав да је:

- $\mu_{a,F}(X) \neq 0$
- $\mu_{a,F}(a) = 0$
- $\mu_{a,F}(X)$ је моничан и несводљив над пољем F.

Полином $\mu_{a,F}(X)$ се назива минималним полиномом елемента a над пољем F.

Тврђење 6.14. Нека је K/F раширење поља $a \in K$ алгебарски елемент над F, чији је минимални полином степена $n \in \mathbb{N}$. Тада је $F[a]$ коначно раширење поља F степена n и $\{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ је једна база за $F[a]$ над F.

Задатак 81. Доказати да је $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ поље, одредити степена раширења $\big[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}\big]$, наћи једну базу за $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ над $\mathbb{Q}$ и групу $\operatorname{Aut}\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Решење. Приметимо да $\sqrt[3]{2}$ анулира $f(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Зато је $\sqrt[3]{2}$ алгебарски елемент над $\mathbb{Q}$, па је $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ поље. Додатно, нуле полинома $f(X)$ (над пољем $\mathbb{C}$) су $\sqrt[3]{2}$, $\varepsilon\sqrt[3]{2}$ и $\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$, где је $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Закључујемо да $f(X)$ нема нула над $\mathbb{Q}$, па је несводљив над тим пољем (пошто је степена ≤ 3). Тај полином је и моничан, па представља минимални полином за $\sqrt[3]{2}$ над $\mathbb{Q}$. Зато је

$$\left[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}\right] = \deg f(X) = 3$$

и $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ је једна база за $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ над $\mathbb{Q}$.

Нека је сада $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ и $z = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ произвољан елемент поља $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Тада је

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \\ &= f(a) + f(b)f(\sqrt[3]{2}) + f(c)f(\sqrt[3]{4}) \\ &= f(a) + f(b)f(\sqrt[3]{2}) + f(c)f(\sqrt[3]{2})^2. \end{aligned}$$

Како је $f\big|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ и $a, b, c \in \mathbb{Q}$ имамо да је $f(a) = a$, $f(b) = b$ и $f(c) = c$, па остаје

$$f(z) = a + b \cdot f(\sqrt[3]{2}) + c \cdot f(\sqrt[3]{2})^2.$$

Из последњег израза можемо закључити да је аутоморфизам f у потпуности одређен вредношћу $f(\sqrt[3]{2})$. Приметимо да је испуњено $f(2) = 2$, одакле следи

$$\begin{aligned} 2 &= f(2) \\ &= f\big((\sqrt[3]{2})^3\big) \\ &= f(\sqrt[3]{2})^3. \end{aligned}$$

Према томе, за вредност $f(\sqrt[3]{2})$ имамо три могућности:

$$f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} \quad \text{или} \quad f(\sqrt[3]{2}) = \varepsilon\sqrt[3]{2} \quad \text{или} \quad f(\sqrt[3]{2}) = \varepsilon^2\sqrt[3]{2},$$

где је $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Приметимо да је $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \leq \mathbb{R}$, па друге две могућности нису остваривe, јер $\varepsilon \notin \mathbb{R}$. Према томе остаје само

$$f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \text{ одакле је } f(z) = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}.$$

Закључујемо да је обавезно $f = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]}$, па је и $\operatorname{Aut}\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]}\}$.
□

Задатак 82. Нека је $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Доказати да је α алгебарски елемент над $\mathbb{Q}$, наћи $\mu_{\alpha,\mathbb{Q}}(X)$, степен раширења $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]]$ и одредити једну базу за $\mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$. Затим изразити елемент $\frac{1}{\alpha-1}$ у добијеној бази.

Решење. Директан рачун показује да важи

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 7 + 2\sqrt{10} \\ \alpha^2 - 7 &= 2\sqrt{10} \\ \alpha^4 - 14\alpha^2 + 49 &= 40 \\ \alpha^4 - 14\alpha^2 + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Закључујемо да α анулира полином $f(X) = X^4 - 14X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$, па је алгебарски елемент над пољем $\mathbb{Q}$.

Сада доказујемо да је $f(X)$ минимални полином за α над $\mathbb{Q}$. Како је тај полином моничан, све што треба да покажемо је да је несводљив над пољем $\mathbb{Q}$. Претпоставимо супротно, нека је $f(x)$ сводљив над $\mathbb{Q}$. Тада постоје полиноми $g(X)$ и $h(X)$ са рационалним коефицијентима такви да је

$$f(X) = g(X)h(X),$$

при чему је $1 \leq \deg g, \deg h \leq 3$. То значи да имамо само две суштински различите могућности:

$$\deg g = 1, \deg h = 3 \quad \text{или} \quad \deg g = 2, \deg h = 2.$$

Прва могућност одмах отпада, јер имплицира да полином $f(X)$ има рационалне нуле, што није тачно (нуле полинома $f(X)$ су $\pm(\sqrt{2} \pm \sqrt{5})$). Зато, испитајмо другу могућност. Пошто је полином $f(X)$ моничан, можемо сматрати да су такви и полиноми $g(X)$ и $h(X)$. Када запишемо $g(X) = X^2 + aX + b$ и $h(X) = X^2 + cX + d$, где су $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ добијамо

$$\begin{aligned} f(X) &= (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) \\ X^4 - 14X^2 + 9 &= X^4 + (a + c)X^3 + (b + d + ac)X^2 + (ad + bc)X + bd. \end{aligned}$$

Последња једначина омогућава да коефицијенте a, b, c и d изразимо као решења система

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ b + d + ac &= -14 \\ ad + bc &= 0 \\ bd &= 9. \end{aligned}$$

Из прве једначине имамо $c = -a$, одакле заменом у трећу једначину добијамо

$$a(d - b) = 0.$$

Одавде добијамо два случаја $a = 0$ или $b = d$.

Ако је $a = 0$, онда је и $c = 0$, а почетни систем се своди на

$$\begin{aligned} b + d &= -14 \\ bd &= 9. \end{aligned}$$

Изражавањем $d = -14 - b$ добијамо квадратну једначину

$$b(-14 - b) = 9 \quad \text{односно} \quad b^2 + 14b + 9 = 0.$$

Ова једначина нема рационалних решења, што уз услов да је $b \in \mathbb{Q}$ даје контрадикцију. Дакле, овај случај је немогућ.

Претпоставимо сада да је $b = d$. Онда четврта једначина полазног система даје $b^2 = 9$, одакле је $b = \pm 3$. Друга једначина полазног система онда постаје

$$a^2 \pm 6 = 14.$$

Одавде је $a^2 = 20$ или $a^2 = 8$. Ни једна од добијених могућности не допушта $a \in \mathbb{Q}$, што је контрадикција. На тај начин одбацујемо и овај случај.

Закључујемо да је полином $f(X)$ несводљив над $\mathbb{Q}$, па је и минималан полином за α над $\mathbb{Q}$. Због тога је $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ једна база за $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, а такође добијамо и $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

Остало је још да изразимо елемент $\frac{1}{\alpha-1}$ у добијеној бази. Треба да нађемо рационалне бројеве A, B, C и D такве да је

$$\frac{1}{\alpha - 1} = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3.$$

Множењем претходне једнакости са $\alpha - 1$ добијамо

$$\begin{aligned} A(\alpha-1) + B\alpha(\alpha-1) + C\alpha^2(\alpha-1) + D\alpha^3(\alpha-1) &= 1 \\ A\alpha - A + B\alpha^2 - B\alpha + C\alpha^3 - C\alpha^2 + D\alpha^4 - D\alpha^3 &= 1 \\ A\alpha - A + B\alpha^2 - B\alpha + C\alpha^3 - C\alpha^2 + D\alpha^4 - D\alpha^3 - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Слично као у претходном задатку, враћамо се на минимални полином $f(X) = X^4 - 14X^2 + 9$ за α да решимо проблем чињенице да је једнакост (15) расписана у односу на скуп $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ који није линеарно независан . Пошто је $f(\alpha) = 0$, следи да је испуњено $\alpha^4 - 14\alpha^2 + 9 = 0$, одакле добијамо израз за α^4,

$$\alpha^4 = 14\alpha^2 - 9.$$

Враћањем у једнакост (15) добијамо

$$\begin{aligned} A\alpha - A + B\alpha^2 - B\alpha + C\alpha^3 - C\alpha^2 + D(14\alpha^2 - 9) - D\alpha^3 - 1 &= 0 \\ (-A - 9D - 1) + (A - B)\alpha + (B - C + 14D)\alpha^2 + (C - D)\alpha^3 &= 0. \end{aligned}$$

Пошто скуп $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ јесте линеарно независан, можемо последњу једнакост заменити еквивалентним системом линеарних једначина

$$\begin{aligned} -A - 9D - 1 &= 0 \\ A - B &= 0 \\ B - C + 14D &= 0 \\ C - D &= 0. \end{aligned}$$

Решавањем овог система добијамо $A = -\frac{13}{4}$, $B = -\frac{13}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ и $D = \frac{1}{4}$. Дакле, тражени израз је

$$\frac{1}{\alpha - 1} = -\frac{13}{4} - \frac{13}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^3.$$

□

Тврђење 6.15 (Гаусова лема). Нека је $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Тада је $f(X)$ несводљив над $\mathbb{Q}$ ако и само ако је несводљив над $\mathbb{Z}$.

Тврђење 6.16 (Ајзенштајнов критеријум). Нека је $f(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Ако постоји прост број p такав да:

- $p \mid a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$
- $p \nmid a_n$
- $p^2 \nmid a_0$,

онда је $f(X)$ несводљив над $\mathbb{Z}$ (а тиме и над $\mathbb{Q}$ због Гаусове леме).

Пример 6.17. Полином $X^n - 2$ је несводљив над $\mathbb{Q}$ за све $n \in \mathbb{N}$ према Ајзенштајновом критеријуму примењеном за $p = 2$.
□

Задатак 83. Нека је θ једна нула полинома $f(X) = X^7 + 3X^5 + 18X^4 - 33X^2 + 6X - 3 \in \mathbb{Z}[X]$. Одредити степен раширења и $[\mathbb{Q}[\theta] : \mathbb{Q}]$ и наћи једну базу за $\mathbb{Q}[\theta]$ над $\mathbb{Q}$.

Решење. Приметимо да је полином $f(X)$ несводљив над $\mathbb{Q}$ према Ајзенштајновом критеријуму примењеном за $p = 3$. Како је $f(X)$ моничан и $f(\theta) = 0$ закључујемо да је минимални полином за θ над $\mathbb{Q}$. Због тога је $[\mathbb{Q}[\theta] : \mathbb{Q}] = \deg f(X) = 7$ и скуп $\{1, \theta, \theta^2 \ldots, \theta^6\}$ представља једну базу за $\mathbb{Q}[\theta]$ над $\mathbb{Q}$.
□

Дефиниција 6.18. Нека је K/F раширење поља и $a, b \in K$ алгебарски елементи над F. Дефинишемо

$$F[a, b] = F[a][b] \leq K.$$

Слично, за сваких n алгебарских елемената $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дефинишемо индуктивно

$$F[a_1, a_2, \ldots, a_n] = F[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}][a_n].$$

Тврђење 6.19. Нека је $F \leq E \leq K$ ланац коначних раширења. Тада је и раширење K/F коначно и важи

$$[K : F] = [K : E][E : F].$$

Прецизније, ако је $\{a_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ база за K над E и $\{b_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ база за E над F, онда је $\{a_i b_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ база за K над F.

Задатак 84. Посматрајмо поље $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}, i]$.
а) Наћи $\alpha \in \mathbb{C}$ такво да је $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.
б) Одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$ и наћи једну базу за K над $\mathbb{Q}$.
в) Одредити групу $\operatorname{Aut} K$.

Решење. а) Означимо $\alpha = \sqrt{3} + i$. Тада је $\alpha \in K$ као збир два елемента из K, па имамо да је $\mathbb{Q}[\alpha] \subseteq K$. Докажимо још обратну инклузију. Приметимо прво да је:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{3 - 1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i) \in \mathbb{Q}[\alpha].$$

Онда и $2\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)=\sqrt{3}-i\in\mathbb{Q}[\alpha]$. Коначно, одатле и $\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i\right)\in\mathbb{Q}[\alpha]$, па и $i=\sqrt{3}+i-\sqrt{3}\in\mathbb{Q}[\alpha]$. Дакле, $\sqrt{3},i\in\mathbb{Q}[\alpha]$, због чега је $K=\mathbb{Q}[\sqrt{3},i]\subseteq\mathbb{Q}[\alpha]$. Према томе, добили смо тражену обратну инклузију, што омогућава да закључимо да је $K=\mathbb{Q}[\alpha]$.

б) Из низа међупроширења $\mathbb{Q}\leq\mathbb{Q}[\sqrt{3}]\leq K$ имамо да је

$$[K:\mathbb{Q}]=[K:\mathbb{Q}[\sqrt{3}]]\cdot[\mathbb{Q}[\sqrt{3}]:\mathbb{Q}].$$

Степен проширења $[\mathbb{Q}[\sqrt{3}]:\mathbb{Q}]$ је једнак степену минималног полинома $\mu_{\sqrt{3},\mathbb{Q}}(X)$ за $\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$. Како је $\sqrt{3}$ нула моничног полинома $X^2-3\in\mathbb{Q}[X]$, несводљивог на основу Ајзенштајновог критеријума примењеног за $p=3$, закључујемо да је $\mu_{\sqrt{3},\mathbb{Q}}(X)=X^2-3$. Због тога је $[\mathbb{Q}[\sqrt{3}]:\mathbb{Q}]=2$, а добијамо да је и $\{1,\sqrt{3}\}$ једна база за $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ над $\mathbb{Q}$.

Слично, како је $K=\mathbb{Q}[\sqrt{3}][i]$, степен проширења $[K:\mathbb{Q}[\sqrt{3}]]$ је једнак степену минималног полинома $\mu_{i,\mathbb{Q}[\sqrt{3}]}(X)$ за i над $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Приметимо да i анулира полином $X^2+1\in\mathbb{Q}[\sqrt{3}][X]$. Због тога је $\deg\mu_{i,\mathbb{Q}[\sqrt{3}]}(X)\in\{1,2\}$. Ако би било $\deg\mu_{i,\mathbb{Q}[\sqrt{3}]}(X)=1$, онда би следило да $i\in\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Међутим, у пољу $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ се налазе само реални бројеви, па је то немогуће. Закључујемо да је $\deg\mu_{i,\mathbb{Q}[\sqrt{3}]}(X)=2$ и прецизније $\mu_{i,\mathbb{Q}[\sqrt{3}]}(X)=X^2+1$, пошто је полином X^2+1 моничан. Због тога је $[K:\mathbb{Q}[\sqrt{3}]]=2$ и $\{1,i\}$ је једна база за K над $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

Коначно, добијамо да је $[K:\mathbb{Q}]=2\cdot2=4$, као и да је $\{1,\sqrt{3},i,i\sqrt{3}\}$ једна база за K над $\mathbb{Q}$.

в) Уочимо произвољно $f\in\operatorname{Aut}K$ и $z\in K$. Расписивањем у бази $\{1,\sqrt{3},i,i\sqrt{3}\}$ за K над пољем $\mathbb{Q}$, добијамо рационалне бројеве a,b,c и d такве да је

$$z=a+b\sqrt{3}+ci+di\sqrt{3}.$$

Тада је

$$\begin{aligned}f(z)&=f(a+b\sqrt{3}+ci+di\sqrt{3})\\&=f(a)+f(b)f(\sqrt{3})+f(c)f(i)+f(d)f(i\sqrt{3})\\&=f(a)+f(b)f(\sqrt{3})+f(c)f(i)+f(d)f(i)f(\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Како је $f\big|_{\mathbb{Q}}=\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ и $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ имамо да је $f(a)=a$, $f(b)=b$, $f(c)=c$ и $f(d)=d$, па остаје

$$f(z)=a+b\cdot f(\sqrt{3})+c\cdot f(i)+d\cdot f(i)\cdot f(\sqrt{3}).$$

Из последњег израза можемо закључити да је аутоморфизам f у потпуности одређен вредностима $f(i)$ и $f(\sqrt{3})$. Приметимо да је испуњено $f(3)=3$ и $f(-1)=-1$, одакле следи

$$3=f(3)=f\big((\sqrt{3})^2\big)=f(\sqrt{3})^2$$

и

$$-1=f(-1)=f\big(i^2\big)=f(i)^2,$$

одакле следи да су једине могућности за вредности $f(\sqrt{3})$ и $f(i)$ одређене са

$$f(\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}\quad\text{и}\quad f(i)=\pm i.$$

Према томе, имамо четири потенцијална аутоморфизма поља K које ћемо записати у зависности од тога где сликају $\sqrt{3}$ и i као

$$f_1 : \begin{cases} \sqrt{3} \to \sqrt{3} \\ i \to i \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \sqrt{3} \to -\sqrt{3} \\ i \to i \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} \sqrt{3} \to \sqrt{3} \\ i \to -i \end{cases} \quad f_4 : \begin{cases} \sqrt{3} \to -\sqrt{3} \\ i \to -i \end{cases} \tag{16}$$

Одмах можемо приметити да је $f_1 = \mathrm{id}_K$, па остаје само да покажемо да и су остала пресликавања аутоморфизми поља K. Урадимо то само за f_2, пошто се за остала пресликавања ради аналогно.

Очигледно је да је f_2 сурјективно пресликавање. Додатно, пошто за произвољне $a + b\sqrt{3} + ci + di\sqrt{3}$ и $p + q\sqrt{3} + ri + si\sqrt{3}$ из K важи

$$\begin{aligned} f\big((a + b\sqrt{3} + ci + di\sqrt{3}) + (p + q\sqrt{3} + ri + si\sqrt{3})\big) &= \\ &= f\big((a+p) + (b+q)\sqrt{3} + (c+r)i + (d+s)i\sqrt{3}\big) \\ &= a + p - (b+q)\sqrt{3} + (c+r)i - (d+s)i\sqrt{3} \\ &= (a - b\sqrt{3} + ci - di\sqrt{3}) + (p - q\sqrt{3} + ri - si\sqrt{3}) \\ &= f(a + b\sqrt{3} + ci + di\sqrt{3}) + f(p + q\sqrt{3} + ri + si\sqrt{3}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f\big((a + b\sqrt{3} + ci + di\sqrt{3}) \cdot (p + q\sqrt{3} + ri + si\sqrt{3})\big) &= \\ = f\big((ap + 3bq - cr - 3ds) + (aq + bp - cs - dr)\sqrt{3} + (ar + 3bs + cp + 3dq)i + & \\ + (as + br + cq + dp)i\sqrt{3}\big) &= \\ = (ap + 3bq - cr - 3ds) - (aq + bp - cs - dr)\sqrt{3} + (ar + 3bs + cp + 3dq)i - & \\ - (as + br + cq + dp)i\sqrt{3} &= \\ = (a - b\sqrt{3} + ci - di\sqrt{3}) \cdot (p - q\sqrt{3} + ri - si\sqrt{3}) & \\ = f(a + b\sqrt{3} + ci + di\sqrt{3}) \cdot f(p + q\sqrt{3} + ri + si\sqrt{3}), & \end{aligned}$$

одмах следи да је f_2 хомоморфизам. Због Задатка 76 је онда f_2 и инјективно, па је аутоморфизам поља K. Закључујемо да је

$$\mathrm{Aut}\, K = \{f_1, f_2, f_3, f_4\},$$

где су пресликавања f_i одређена формулама (16).
□

Коренско поље

Нека је F поље и $f(X)$ полином са коефицијентима у F. Претпоставимо да $f(X)$ има све нуле $a_1, a_2, \ldots, a_n$ у неком проширењу K поља F. Коренско поље полинома $f(X)$ над пољем F је $F[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Пример 6.20. Нуле полинома $f(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$ су једнаке $\sqrt[3]{2}, \varepsilon\sqrt[3]{2}$ и $\varepsilon^2\sqrt[3]{2}$, где је $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Зато је коренско поље полинома $f(X)$ над $\mathbb{Q}$ једнако $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}, \varepsilon\sqrt[3]{2}, \varepsilon^2\sqrt[3]{2}\right] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \varepsilon]$.
□

Задатак 85. Наћи број $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је коренско поље K полинома $f(X)$ над $\mathbb{Q}$ једнако $\mathbb{Q}[\alpha]$ ако је:
а) $f(X) = X^4 - 6X^2 + 4$.
б) $f(X) = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$.

Решење. а) Одредимо сва решења једначине $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$ над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$. Увођењем смене $x^2 = t$ она се своди на квадратну једначину $t^2 - 6t + 4 = 0$. Њена решења су $t_1 = 3 + \sqrt{5}$ и $t_2 = 3 - \sqrt{5}$. Зато су решења полазне једначине

$$x_1 = \sqrt{3+\sqrt{5}},\ x_2 = -\sqrt{3+\sqrt{5}},\ x_3 = \sqrt{3-\sqrt{5}},\ x_4 = -\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Према томе, важи $K = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{3+\sqrt{5}}, \sqrt{3-\sqrt{5}}\right]$. Приметимо још да је

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{9-5} = 2,$$

па важи $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$. Због тога је $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{3+\sqrt{5}}\right]$.
б) Одредимо сва решења једначине $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$ над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$. У ту сврху имамо

$$\begin{aligned}
&x^4 + x(x^2-2) - (x^2-2) - 4 = 0\\
&(x^2-2)(x^2+2) + x(x^2-2) - (x^2-2) = 0\\
&(x^2-2)(x^2+2+x-1) = 0\\
&(x^2-2)(x^2+x+1) = 0,\ \text{па је } x^2-2=0 \text{ или } x^2+x+1=0.
\end{aligned}$$

Закључујемо да су решења наше једначине $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, при чему је $x_3 x_4 = 1$. Због тога је

$$K = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, i\sqrt{3}\right].$$

Означимо $\alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$. Одмах имамо да $\alpha \in K$, па важи $\mathbb{Q}[\alpha] \subseteq K$. Са друге стране,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{3}}{2+3} = \frac{1}{5}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{3}\right).$$

Одатле је $\sqrt{2} - i\sqrt{3} = \frac{5}{\alpha} \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Даље онда и

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{3} + \sqrt{2} - i\sqrt{3}\right) \in \mathbb{Q}[\alpha],$$

као и

$$i\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{3} - (\sqrt{2} - i\sqrt{3})\right) \in \mathbb{Q}[\alpha].$$

Дакле, $\sqrt{2}, i\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\alpha]$, па је $K \subseteq \mathbb{Q}[\alpha]$. Закључујемо да је $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ за $\alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$.
□

Задатак 86. Нека је $p > 2$ прост број. Одредити коренско поље K полинома $f(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ над пољем $\mathbb{Q}$ и степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

Решење. Приметимо да важи $f(X)(X-1) = X^p - 1$, одакле следи да су нуле полинома $f(X)$ у пољу $\mathbb{C}$ решења једначине

$$x^p - 1 = 0,$$

различита од један. Лако налазимо да су тражена решења $\left\{\zeta_p, \zeta_p^2, \ldots, \zeta_p^{p-1}\right\}$, где је $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Одатле је директно

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{Q}[\zeta_p, \zeta_p^2, \ldots, \zeta_p^{p-1}] \\ &= \mathbb{Q}[\zeta_p], \end{aligned}$$

чиме је одређено коренско поље K.

Остало је још да одредимо степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$. Из добијеног $K = \mathbb{Q}[\zeta_p]$ имамо да је $[K : \mathbb{Q}]$ једнак степену минималног полинома за ζ_p над пољем $\mathbb{Q}$. Доказаћемо да је тај минимални полином једнак управо полиному $f(X)$.

Одмах имамо да је полином $f(X)$ моничан и да га ζ_p анулира, па је остало још да покажемо да је несводљив над пољем $\mathbb{Q}$. У ту сврху ћемо користити чињеницу да је полином $f(X)$ несводљив над пољем $\mathbb{Q}$ ако и само ако је такав полином $f(X + c)$ за неко $c \in \mathbb{Z}$.

Посматрајмо полином $f(X + 1)$. Тада је

$$\begin{aligned} f(X+1)X &= (X+1)^p - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k, \end{aligned}$$

одакле дељењем са X добијамо једнакост

$$f(X+1) = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^{k-1},$$

односно

$$f(X+1) = \binom{p}{1} + \binom{p}{2} X + \cdots + \binom{p}{p-1} X^{p-2} + X^{p-1}.$$

Приметимо да за све $1 \leq i < p$ имамо

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!},$$

одакле, пошто је p прост број, директно следи $p \mid \binom{p}{i}$. Такође, тривијално p не дели водећи коефицијент 1 полинома $f(X + 1)$, нити $p^2 \mid \binom{p}{1} = p$, што значи да $f(X +$

1) испуњава услове Ајзенштајновог критеријума за прост број p. То значи да је тај полином несводљив над $\mathbb{Q}$, а тиме је и $f(X)$ минимални за ζ_p над тим пољем. Коначно, последње повлачи да важи

$$[K : \mathbb{Q}] = \deg f = p - 1.$$

□

Задатак 87. Одредити коренско поље K полинома $f(X) = X^4 + 1$ над пољем $\mathbb{Q}$, као и степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

Решење. Да бисмо одредили тражено коренско поље K прво треба да над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$ решимо једначину $x^4 + 1 = 0$. Тражена решења су $x_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $x_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $x_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$ и $x_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}}$. Због тога је

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4] \\ &= \mathbb{Q}[x_1, x_1^3, x_1^5, x_1^7] \\ &= \mathbb{Q}[x_1]. \end{aligned}$$

Остаје још да одредимо степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$. За њега имамо да је једнак степену минималног полинома $\mu_{x_1,\mathbb{Q}}(X)$ за x_1 над $\mathbb{Q}$. Полином $f(X)$ је моничан и x_1 га анулира, па ако покажемо да је несводљив над $\mathbb{Q}$, добићемо $\mu_{x_1,\mathbb{Q}}(X) = f(X)$. У ту сврху приметимо да важи

$$\begin{aligned} f(X+1) &= (X+1)^4 + 1 \\ &= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 + 1 \\ &= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 2, \end{aligned}$$

што је полином несводљив према Ајзенштајновом критеријуму примењеном за прост број $p = 2$. Због тога је полином $f(X+1)$, а тиме и $f(X)$ несводљив над $\mathbb{Q}$. Закључујемо да је заиста $\mu_{x_1,\mathbb{Q}}(X) = f(X)$, одакле следи $[K : \mathbb{Q}] = \deg f(X) = 4$.
□

Задатак 88. Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^6 - 1$ над коначним пољем $\mathbb{F}_5$. Одредити број елемената поља K.

Решење. Раставимо прво полином $f(X)$ на несводљиве факторе над пољем $\mathbb{F}_5$. Добијамо:

$$\begin{aligned} X^6 - 1 &= (X^2 - 1)(X^4 + X^2 + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^4 + X^2 + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1). \end{aligned}$$

Ако означимо нуле несводљивих полинома $X^2 + X + 1$ и $X^2 - X + 1$ (у неком раширењу поља $\mathbb{F}_5$) редом са α_1, α_2 и β_1, β_2, добијамо да је

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{F}_5[1, -1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] \\ &= \mathbb{F}_5[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]. \end{aligned}$$

Приметимо даље да пошто је $\alpha_i^2 + \alpha_i + 1 = 0$ за $i = 1, 2$, важи и $(-\alpha_i)^2 - \alpha_i + 1 = 0$, односно $\alpha_i^2 - \alpha_i + 1 = 0$, што значи да вредности $-\alpha_i$ анулирају полином $X^2 - X + 1$. Другим речима, без умањења општости, можемо сматрати да је $\beta_1 = -\alpha_1$ и $\beta_2 = -\alpha_2$. На тај начин добијамо

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{F}_5[\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2] \\ &= \mathbb{F}_5[\alpha_1, \alpha_2]. \end{aligned}$$

Из Вијетових веза за полином $X^2 + X + 1$ можемо закључити да је $\alpha_1\alpha_2 = 1$, односно $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1}$. Одатле следи да је

$$K = \mathbb{F}_5\left[\alpha_1, \frac{1}{\alpha_1}\right] = \mathbb{F}_5[\alpha_1].$$

Последње добијеним је одређено тражено коренско поље K. Такође, имамо да је одговарајући степен раширења $[K : \mathbb{F}_5]$ једнак степену минималног полинома за α_1 над $\mathbb{F}_5$. Одмах имамо да је тај полином једнак $X^2 + X + 1$, одакле следи

$$[K : \mathbb{F}_5] = 2,$$

што повлачи и $|K| = 25$.
□