



Универзитет у Београду
Математички факултет
Катедра за вероватноћу и статистику



ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ И ПРИМЕНЕ У ФИНАНСИЈАМА

СЕПТЕМБАР 2 - 23. октобар 2025. године

др Јелена Јоцковић
Стефан Малбашић

1. [6 поена] У временској серији `hyndsight` (пакет `fpp2`) налазе се подаци о дневном броју посета блогу `Hyndsight` у периоду од 30. априла 2014. до 29. априла 2015 године.

- (а) Одредити декомпозицију временске серије и оценити тренд и сезонску компоненту. Укратко објаснити како функционише метода покретних просека за изравнавања серије. Да ли податке боље описује адитивни или мултипликативни модел? Одговор образложити.
- (б) Уклопити временску серију у одговарајући `Holt – Winters` модел, написати једначине добијеног модела, а затим интерпретирати добијене оцене коефицијената модела. Извршити прогнозу броја посета блогу у наредних 45 дана и приказати резултате заједно са историјским подацима на истом графику.
- (в) Оцените адекватност изабраног модела кроз резидуале (аутокорелације, `Ljung – Box` тест), расподелу грешака и стабилност сезоналности кроз време.

2. [8 поена]

- (а) Нека је $\{x_t\}$ случајно лутање дато са $x_t = x_{t-1} + w_t$, где је $\{w_t\}$ Гаусов бели шум са стандардном девијацијом 2. Симулирати и графички приказати серију $\{x_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$. Одредити теоријску и узорачку аутоковаријациону и аутокорелациону функцију.
- (б) Показати да процес $\{x_t\}$, где је $x_t = \frac{3}{2}x_{t-1} - \frac{1}{2}x_{t-2} + w_t$, није стационаран, али да процес $\{y_t\}$, дат са $y_t = \nabla x_t$, јесте стационаран.
- (в) $AR(1)$ модел са средњом вредношћу μ , $\mu \neq 0$, може се представити као

$$x_t - \mu = \alpha(x_{t-1} - \mu) + w_t,$$

или

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + w_t.$$

Одредити везу између параметара α, μ и α_0, α_1 . Која је веза одговарајућих параметара у $AR(2)$ моделу?

3. [12 поена] Дати су процеси

$$\begin{aligned}(1 - 1.2L + 0.32L^2)u_t &= (1 - 0.8L + 0.16L^2)w_t, \\ (1 - L)(1 - L^{12})v_t &= (1 + 0.7L)(1 - 0.5L^{12})w_t, \\ r_t &= (1 - 0.4L)^{-1}u_t, \\ q_t &= \nabla \nabla_{12} v_t,\end{aligned}$$

где је $\{w_t\}$ Гаусов бели шум са дисперзијом $\sigma_w^2 = 1$, а L је оператор кашњења.

- (а) Графички приказати серије $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, $\{r_t\}$ и $\{q_t\}$ за $t = 1, 2, \dots, 1000$.
- (б) Идентификовати модел процеса $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, $\{r_t\}$ и $\{q_t\}$, а затим испитати њихову инвертибилност и стационарност.
- (в) Графички приказати ACF и $PACF$ датих процеса, а затим интерпретирати добијене оцене коефицијената модела.

4. [6 поена] Дат је процес

$$x_t = 70 + 2t - 3t^2 + z_t,$$

где је $\{z_t\}$ је $AR(1)$ процес дат са $z_t = 0.5z_{t-1} + w_t$, а $\{w_t\}$ је Гаусов бели шум са стандардном девијацијом 5.

- (а) Симулирати и графички приказати серију $\{x_t : t = 1, 2, \dots, 100\}$.
 - (б) Користећи уопштени метод најмањих квадрата (GLS) уклопити серију у регресиони модел са квадратним трендом.
 - (в) Одредити 95% интервале поверења за оцењене параметре из претходног модела.
5. [10 поена] Временска серија `elesequip` (пакет `fpp2`) садржи податке о месечној производњи електричне опреме у периоду од јануара 1996. до марта 2012. године.
- (а) Уклопити дату серију у најбољи сезонски $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ модел. Детаљно образложити одабир модела. (Напомена: Као решење се не признаје позив функције `auto.arima`)
 - (б) Испитати независност и нормалност резидуала за одабрани модел.
 - (в) Извршити предвиђање на основу одабраног модела за период до краја 2012. године.
6. [8 поена] У бази података `google.csv` налазе се подаци о цени акција компаније Google, дневно од 3. јануара 2012. године до 30. децембра 2016. године.
- (а) Написати једначине $GARCH(p, q)$ модела. За моделирање каквих серија се он користи? Да ли је то стационаран процес?
 - (б) Од серије `google$Close` направити серију стопа раста цена акција. На основу чега се може закључити да је новодобијена серија хетероскедастична? Нову серију уклопити у $GARCH(1, 1)$ модел. Одредити интервале поверења за параметре модела.