



Универзитет у Београду
Математички факултет
Катедра за вероватноћу и статистику



**ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ
И ПРИМЕНЕ У ФИНАНСИЈАМА**

СЕПТЕМБАР 1 - 10. октобар 2025. године

др Јелена Јоцковић
Стефан Малбашић

1. [6 поена] У временској серији `hyndsight` (пакет `fpp2`) налазе се подаци о дневном броју посета блогу Hyndsight у периоду од 30. априла 2014. до 29. априла 2015 године.
 - (а) Одредити декомпозицију временске серије и оценити тренд и сезонску компоненту. Укратко објаснити како функционише метода покретних просека за изравнавања серије. Да ли податке боље описује адитивни или мултипликативни модел? Одговор образложити.
 - (б) Уклопити временску серију у одговарајући Holt – Winters модел, написати једначине добијеног модела, а затим интерпретирати добијене оцене коефицијената модела. Извршити прогнозу броја посета блогу у наредних 45 дана и приказати резултате заједно са историјским подацима на истом графику.
 - (в) Оцените адекватност изабраног модела кроз резидуале (аутокорелације, Ljung – Box тест), расподелу грешака и стабилност сезоналности кроз време.
2. [8 поена] У бази података `global.txt` налазе се подаци о глобалној температури, изражени као одступање од месечних средњих вредности за период од 1856. до 2005. године.
 - (а) Серију годишњих температура уклопити у одговарајући AR процес, а затим написати једначину модела.
 - (б) Шта је парцијална аутокорелациона функција $PACF(k)$? Имплементирати у R-у функцију функцију $PACF(k, x)$ која за дато k и серију x рачуна оцењену вредност $PACF(k)$.
 - (в) Графички приказати корелограм и парцијални корелограм годишње серије температуре.
3. [12 поена] Дати су процеси

$$\begin{aligned}(1 - 1.2L + 0.32L^2)u_t &= (1 - 0.8L + 0.16L^2)w_t, \\ (1 - L)(1 - L^{12})v_t &= (1 + 0.7L)(1 - 0.5L^{12})w_t, \\ r_t &= (1 - 0.4L)^{-1}u_t, \\ q_t &= \nabla \nabla_{12} v_t,\end{aligned}$$

где је $\{w_t\}$ Гаусов бели шум са дисперзијом $\sigma_w^2 = 1$, а L је оператор кашњења.

- (а) Графички приказати серије $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, $\{r_t\}$ и $\{q_t\}$ за $t = 1, 2, \dots, 1000$.
 - (б) Идентификовати модел процеса $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, $\{r_t\}$ и $\{q_t\}$, а затим испитати њихову инвертибилност и стационарност.
 - (в) Графички приказати ACF и PACF датих процеса, а затим интерпретирати добијене оцене коефицијената модела.
4. [6 поена] Нека је $x_t = a + bt + w_t$ и $y_t = \nabla x_t$, где су a, b реални бројеви.
 - (а) Доказати да се процес $\{x_t\}$ може представити као $x_t = x_0 + \sum_{i=1}^t y_i$ и одредити x_0 .
 - (б) Претпоставимо да се процес $\{y_t\}$ може уклопити у модел облика $y_t = b + w_t + \beta w_{t-1}$, где је $\beta \neq -1$. Доказати да ће симулирана серија $\{x_t\}$ имати растућу дисперзију око праве $a + bt$.

5. [10 поена] Временска серија `elesequip` (пакет `fpp2`) садржи податке о месечној производњи електричне опреме у периоду од јануара 1996. до марта 2012. године.
- (а) Уклопити дату серију у најбољи сезонски $\text{ARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ модел. Детаљно образложити одабир модела. (Напомена: Као решење се не признаје позив функције `auto.arima`)
 - (б) Испитати независност и нормалност резидуала за одабрани модел.
 - (в) Извршити предвиђање на основу одабраног модела за период до краја 2012. године.
6. [8 поена] У бази података `stockmarket.txt` налазе се берзански подаци за 7 градова у периоду од 6. јануара 1986. до 31. децембра 1997. године. Посматрајмо податке за град Лондон.
- (а) Трансформисати оригиналне цене у дискретне приносе r_t дате са

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad t \geq 2,$$

где је P_t одговарајући берзански податак за тренутак t .

- (б) Уклопити временску серију $\{R_t\}$ у следеће моделе и одабрати најбољи: $\text{ARIMA}(3, 0, 0)$, $\text{ARIMA}(2, 0, 1)$, $\text{ARIMA}(4, 0, 1)$, $\text{SARIMA}(1, 0, 0)(1, 0, 0)_{12}$. Приказати графички корелограм серије резидула и корелограм серије квадрата резидуала одабраног модела. Да ли је серија резидуала хетероскедастична? Зашто?
- (б) Написати једначине $\text{GARCH}(p, q)$ модела. За моделирање каквих серија се он користи?
- (в) Серију резидуала уклопити у следеће моделе и одабрати најбољи: $\text{GARCH}(1, 0)$, $\text{GARCH}(2, 1)$, $\text{GARCH}(5, 3)$, $\text{GARCH}(3, 2)$. Одредити интервале поверења за параметре одабраног модела.