



Универзитет у Београду
Математички факултет
Катедра за вероватноћу и статистику



ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ И ПРИМЕНЕ У ФИНАНСИЈАМА

ЈУН 2 - 27. септембар 2025. године

др Јелена Јоцковић
Стефан Малбашић

1. [6 поена] У временској серији **salmon** (пакет **astsa**) налазе се подаци о просечној месечној цени норвешког лососа по килограму у доларима почевши од септембра 2003. године.
 - (а) Одредити декомпозицију временске серије и оценити тренд и сезонску компоненту. Укратко објаснити како функционише метода покретних просека за изравнавања серије. Да ли податке боље описује адитивни или мултипликативни модел? Одговор образложити.
 - (б) Уклопити временску серију у одговарајући Holt – Winters модел, написати једначине добијеног модела, а затим интерпретирати добијене оцене коефицијената модела. Предвидети вредности за другу половину 2017. године и за 2018. годину и приказати резултате заједно са историјским подацима на истом графику.
2. [8 поена] У бази података **global.txt** налазе се подаци о глобалној температури, изражени као одступање од месечних средњих вредности за период од 1856. до 2005. године.
 - (а) Серију годишњих температура уклопити у одговарајући AR процес, а затим написати једначину модела.
 - (б) Шта је парцијална аутокорељациона функција **PACF(k)**? Имплементирати у R-у функцију функцију **PACF(k, x)** која за дато k и серију x рачуна оцењену вредност **PACF(k)**.
 - (в) Графички приказати корелограм и парцијални корелограм годишње серије температуре.
3. [12 поена] Нека је $\{x_t\}$ ARMA(1, 1) процес дат са $x_t = \alpha x_{t-1} + w_t + \beta w_{t-1}$, где је $\{w_t\}$ бели шум са очекивањем $E(w_t) = 0$ и дисперзијом $D(w_t) = \sigma_w^2$, а α и β реални параметри модела.
 - (а) Доказати да је аутокорељациона функција ρ_k дата са
$$\rho_k = \frac{\alpha^{k-1}(\alpha + \beta)(1 + \alpha\beta)}{1 + 2\alpha\beta + \beta^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$
 - (б) Имплементирати у R-у функцију **AutoCorrelation(α, β)** која за дати ARMA(1, 1) модел са параметрима α и β одређује аутокорељациону функцију.
 - (в) Графички приказати аутокорељациону функцију за модел са параметрима $\alpha = 0.6$ и $\beta = -0.3$ за $k = 0, 1, \dots, 20$.
 - (г) Симулирати и графички приказати серију $\{x_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$ ARMA(1, 1) модела са параметрима $\alpha = 0.6$ и $\beta = -0.3$, а затим упоредити узорачки корелограм са теоријским вредностима аутокорељационе функције из дела под (в).
 - (д) Ако су узорачке корелације $\hat{\rho}(1) = 0.55$ и $\hat{\rho}(2) = 0.20$, одредити вредност параметара (α, β) и испитати стационарност и инвертибилност добијеног процеса.
 - (ђ) Ако је $\hat{\gamma}(0) = 2$, одредити оцену дисперзије $\hat{\sigma}_w$.
4. [6 поена] У бази **auscfe** (пакет **fpp2**) се налазе подаци о новцу потрошеном у кафићима и ресторанима у Аустралији у периоду од априла 1982. године до септембра 2017. године.
 - (а) Уклопити серију у линеарни модел са трендом који је линеарна функција времена и са адитивном сезонском индикаторском случајном променљивом.
 - (б) Користећи модел из дела (а) предвидети колико ће бити потрошено новца у кафићима и ресторанима Аустралије до краја 2017. и током 2018. године.
 - (в) Посматрати резидуале линеарног модела из дела (а) и на основу изгледа ACF и PACF уклопити их у неки ARMA модел. Одговор образложити.

5. [10 поена] Временска серија `elesequip` (пакет `fpp2`) садржи податке о месечној производњи електричне опреме у периоду од јануара 1996. до марта 2012. године.
- (а) Уклопити дату серију у најбољи сезонски $\text{ARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ модел. Детаљно образложити одабир модела. (Напомена: Као решење се не признаје позив функције `auto.arima`)
 - (б) Испитати независност и нормалност резидуала за одабрани модел.
 - (в) Извршити предвиђање на основу одабраног модела за период до краја 2012. године.
6. [8 поена] Дат је процес $a_t = w_t \sqrt{h_t}$, где је $h_t = 0.12 + 0.46a_{t-1} + 0.25h_{t-1}$, а w_t Гаусов бели шум са нормалном $\mathcal{N}(0, 1)$ расподелом.
- (а) Симулирати и графички приказати серију $\{a_t : t = 1, 2, \dots, 10000\}$. Нацртати корелограм симулиране серије и корелограм квадриране серије. Да ли је серија хетероскедастична? Зашто?
 - (б) Написати једначине $\text{GARCH}(p, q)$ модела. За моделирање каквих серија се он користи?
 - (в) Серију $\{a_t\}$ уклопити у следеће моделе и одабрати најбољи: $\text{GARCH}(1, 0)$, $\text{GARCH}(2, 1)$, $\text{GARCH}(1, 1)$, $\text{GARCH}(0, 1)$. Одредити интервале поверења за параметре одабраног модела.