



Универзитет у Београду
Математички факултет
Катедра за вероватноћу и статистику



ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ И ПРИМЕНЕ У ФИНАНСИЈАМА

ЈАНУАР 2 - 26. август 2025. године

др Јелена Јоцковић
Стефан Малбашић

1. [8 поена] У временској серији **salmon** (пакет **astsa**) налазе се подаци о просечној месечној цени норвешког лососа по килограму у доларима почевши од септембра 2003. године.
 - (а) Одредити декомпозицију временске серије и оценити тренд и сезонску компоненту. Укратко објаснити како функционише метода покретних просека за изравнавања серије. Да ли податке боље описује адитивни или мултипликативни модел? Одговор образложити.
 - (б) Уклопити временску серију у одговарајући Holt – Winters модел, написати једначине добијеног модела, а затим интерпретирати добијене оцене коефицијената модела. Предвидети вредности за другу половину 2017. године и за 2018. годину и приказати резултате заједно са историјским подацима на истом графику.
 - (в) Оцените адекватност изабраног модела кроз резидуале (аутокорелације, Ljung – Box тест), расподелу грешака и стабилност сезоналности кроз време.
2. [10 поена] Нека је $\{x_t\}$ процес дат са

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \phi_3 x_{t-3} + w_t,$$

где је $\{w_t\}$ Гаусов бели шум са стандардном девијацијом 2.

- (а) Одредити карактеристични полином процеса $\{x_t\}$ и навести услов стационарности процеса.
 - (б) Ако је $\phi_1 = 2.5$, $\phi_2 = -2$ и $\phi_3 = 0.5$, испитати да ли процес $\{x_t\}$ има двоструки јединични корен. Да ли је $\{x_t\}$ стационаран?
 - (в) Испитати стационарност процеса $\{y_t\}$, где је $y_t = \nabla^2 x_t$.
 - (г) Графички приказати узорачку аутокорелациону и аутоковаријациону функцију симулираних процеса $\{x_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$ и $\{y_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$.
 - (д) Процес $\{y_t\}$ уклопити у одговарајући AR модел и одредити 95% интервал поверења за процењене коефицијенте модела. Приказати резидуале процењеног модела. Да ли се резидуали понашају као бели шум?
3. [8 поена] Нека је $\{x_t\}$ сезонски $\text{AR}(1)_s$ ($\text{ARMA}(0, 0, 0) \times (1, 0, 0)_s$) модел дат са

$$(1 - \Phi_1 L^s) X_t = w_t,$$

где је $\{w_t\}$ бели шум са нормалном $\mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ расподелом, $|\Phi_1| < 1$ реалан параметар модела, а $s \in \mathbb{N}$ период сезоналности.

- (а) Ако важи да је $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j w_{t-js}$, доказати да су аутоковаријациона функција $\gamma(k)$ и аутокорелациона функција $\rho(k)$ дате са

$$\gamma(k) = \begin{cases} \frac{\sigma_w^2}{1 - \Phi_1^2}, & k = 0 \\ \frac{\sigma_w^2}{1 - \Phi_1^2} \Phi_1^m, & k = ms, m = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \Phi_1^m, & k = ms, m = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- (б) Имплементирати у R-у функцију $\text{ACF_SAR1}(\Phi_1, s, K)$ која за дати $\text{AR}(1)_s$ модел са параметром Φ_1 одређује аутокорелациону функцију $(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_K)$.
- (в) Графички приказати аутокорелациону функцију за модел са параметром $\Phi_1 = 0.7$, $\sigma_w = 1$ и периодом сезоналности $s = 12$ за $k = 0, 1, \dots, 60$.

- (г) Симулирати и графички приказати серију $\{x_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$ $AR(1)_{12}$ модела са параметром $\Phi_1 = 0.7$ и $\sigma_w = 1$, а затим упоредити узорачки корелограм са теоријским вредностима аутокорељационе функције из дела под (в).
4. **[6 поена]** У бази **cafe** (пакет **fpp**) се налазе подаци о новцу потрошеном у кафићима и ресторанима у Аустралији у периоду од другог квартала 1982. године до четвртог квартала 2010. године.
- (а) Уклопити серију у линеарни модел са трендом који је линеарна функција времена и са адитивном сезонском индикаторском случајном променљивом.
 - (б) Користећи модел из дела (а) предвидети колико ће бити потрошено новца у кафићима и ресторанима Аустралије током 2011. и 2012. године.
 - (в) Посматрати резидуале линеарног модела из дела (а) и на основу изгледа **ACF** и **PACF** уклопити их у неки **ARMA** модел. Одговор образложити.
5. **[10 поена]** Временска серија **h02** (пакет **fpp**) садржи подакте о месечној продаји лекова у Аустралији месечно од јула 1991. године до јуна 2008. године.
- (а) Уклопити дату серију у најбољи сезонски $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ модел. Детаљно образложити одабир модела. (Напомена: Као решење се не признаје позив функције **auto.arima**)
 - (б) Испитати независност и нормалност резидуала за одабрани модел.
 - (в) Извршити предвиђање на основу одабраног модела за период од наредне четири године.
6. **[8 поена]** У бази података **stockmarket.txt** налазе се берзански подаци за 7 градова у периоду од 6. јануара 1986. до 31. децембра 1997. године. Посматрајмо податке за град Амстердам.
- (а) Уклопити временску серију у следеће моделе и одабрати најбољи: $ARIMA(0, 1, 0)$, $ARIMA(1, 1, 0)$, $ARIMA(0, 1, 1)$, $ARIMA(1, 1, 1)$. Приказати графички корелограм серије резидуала и корелограм серије квадрата резидуала одабраног модела. Да ли је серија резидуала хетероскедастична? Зашто?
 - (б) Написати једначине $GARCH(p, q)$ модела. За моделирање каквих серија се он користи?
 - (в) Серију резидуала уклопити у следеће моделе и одабрати најбољи: $GARCH(0, 1)$, $GARCH(1, 0)$, $GARCH(1, 1)$, $GARCH(0, 2)$. Одредити интервале поверења за параметре одабраног модела.