



Универзитет у Београду
Математички факултет
Катедра за вероватноћу и статистику



ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ И ПРИМЕНЕ У ФИНАНСИЈАМА

ЈАНУАР 1 - 13. август 2025. године

др Јелена Јоцковић
Стефан Малбашић

1. [8 поена] У временској серији **ausbeer** (пакет **fpp2**) налазе се подаци о кварталној производњи пива у Аустралији (у мегалитрима) за период од првог квартала 1956. године до другог квартала 2010. године.

- (а) Одредити декомпозицију временске серије и оценити тренд и сезонску компоненту. Укратко објаснити како функционише метода покретних просека за изравнавања серије. Да ли податке боље описује адитивни или мултипликативни модел? Одговор образложити.
- (б) Уклопити временску серију у одговарајући Holt – Winters модел, написати једначине добијеног модела, а затим интерпретирати добијене оцене коефицијената модела. Извршити прогнозу производње пива за наредних 3 године и приказати резултате заједно са историјским подацима на истом графику.
- (в) Оцените адекватност изабраног модела кроз резидуале (аутокорелације, Ljung – Box тест), расподелу грешака и стабилност сезоналности кроз време.

2. [8 поена]

- (а) Нека је $\{x_t\}$ случајно лутање дато са $x_t = x_{t-1} + w_t$, где је $\{w_t\}$ Гаусов бели шум са стандардном девијацијом 2. Симулирати и графички приказати серију $\{x_t : t = 1, 2, \dots, 1000\}$. Одредити теоријску и узорачку аутоковаријациону и аутокорелациону функцију.
- (б) Показати да процес $\{x_t\}$, где је $x_t = \frac{3}{2}x_{t-1} - \frac{1}{2}x_{t-2} + w_t$, није стационаран, али да процес $\{y_t\}$, дат са $y_t = \nabla x_t$, јесте стационаран.
- (в) $AR(1)$ модел са средњом вредношћу μ , $\mu \neq 0$, може се представити као

$$x_t - \mu = \alpha(x_{t-1} - \mu) + w_t,$$

или

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + w_t.$$

Одредити везу између параметара α, μ и α_0, α_1 . Која је веза одговарајућих параметара у $AR(2)$ моделу?

3. [10 поена] Временска серија **nottem** садржи месечне податке о просечној температури ваздуха у Нотингемском замку од јануара 1920. до децембра 1939. године. Ана је ову серију уклопила у модел облика

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-12} + w_t,$$

а Марија у модел облика

$$y_t = \theta_0 + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-12},$$

где су $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \theta_0, \theta_1$ и θ_2 непознати параметри, а $\{w_t\}$ бели шум.

- (а) Проценити непознате параметре $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2$ предложених модела.
- (б) Одредити 95% интервал поверења за параметар φ_2 и прокоментарисати да ли је ефекат годишњег заостајања статистички значајан.
- (в) Испитати стационарност процеса $\{x_t\}$ и инвертибилност процеса $\{y_t\}$ анализом карактеристичних полинома и положаја њихових коренова у комплексној равни.
- (г) Спровести анализу резидуала (ACF, Ljung – Box тест) и оценити адекватност оба модела.
- (д) На основу информационог критеријума (AIC) и резултата анализе резидуала, закључити да ли подаци више одговарају Анином или Маријином моделу. Одговор образложити.

4. [6 поена] Дат је процес

$$x_t = 70 + 2t - 3t^2 + z_t,$$

где је $\{z_t\}$ је AR(1) процес дат са $z_t = 0.5z_{t-1} + w_t$, а $\{w_t\}$ је Гаусов бели шум са стандардном девијацијом 5.

- (а) Симулирати и графички приказати серију $\{x_t : t = 1, 2, \dots, 100\}$.
 - (б) Користећи уопштени метод најмањих квадрата (GLS) уклопити серију у регресиони модел са квадратним трендом.
 - (в) Одредити 95% интервале поверења за оцењене параметре из претходног модела.
5. [10 поена] Временска серија `nybirths.txt` садржи податке о броју рођених беба од јануара 1946.
- (а) Уклопити дату серију у најбољи сезонски $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ модел. Детаљно образложити одабир модела. (Напомена: Као решење се не признаје позив функције `auto.arima`)
 - (б) Испитати независност и нормалност резидуала за одабрани модел.
 - (в) Извршити предвиђање на основу одабраног модела за наредне године.
6. [8 поена] У бази података `google.csv` налазе се подаци о цени акција компаније Google, дневно од 3. јануара 2012. године до 30. децембра 2016. године.
- (а) Написати једначине GARCH(p, q) модела. За моделирање каквих серија се он користи? Да ли је то стационаран процес?
 - (б) Од серије `google$Close` направити серију стопа раста цена акција. На основу чега се може закључити да је новодобијена серија хетероскедастична? Нову серију уклопити у GARCH(1, 1) модел. Одредити интервале поверења за параметре модела.