



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б (4МНЛ)

ЈАНУАР 2 - 30. август 2025. године

1. За карактеристичну функцију општег члана X_n низа независних случајних величина важи да је

$$\varphi_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it} + \frac{1}{n} \cos 2t,$$

док општи члан Y_n низа независних случајних величина има униформну $\mathcal{U}\left[0, \frac{1}{n}\right]$ расподелу. Ако су за сваки природан број n случајне величине X_n и Y_n независне, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Z_n) , где је

$$Z_n = \frac{X_n - 1}{\sqrt{n}} + Y_n.$$

2. Број клијената који приступе банкомату током једног минута има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. Извршено је мерење на узорку од 14 случајно изабраних једноминутних периода и добијено је да је просечан број приступа 1.32 клијента по минути. На основу добијеног узорка, са прагом значајности 0.08 тестирати најмоћнијим тестом хипотезу $H_0 (\lambda = 1)$ против алтернативе $H_1 (\lambda = \lambda_1)$, $\lambda_1 > 1$.
3. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ расподелу, извучен је узорак обима 12. Ако је σ^2 непознат параметар, одредити позитиван реалан број c , такав да са вероватноћом 0.80 дужина 90% интервала поверења за непознати параметар μ , симетричног у односу на узорачку средину, буде не већа од $c\sigma$.

Решења задатака

1. Како је $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, следи да је

$$\begin{aligned}\varphi_{X_n}(t) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it} + \frac{1}{n} \cos 2t \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it} + \frac{1}{2n} e^{2it} + \frac{1}{2n} e^{-2it},\end{aligned}$$

па општи члан X_n низа независних случајних величина има закон расподеле

$$X_n : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2n} & 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}.$$

Одавде имамо да општи члан W_n низа случајних величина, где је $W_n = \frac{X_n - 1}{\sqrt{n}}$, има закон расподеле

$$W_n : \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{n}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{2n} & 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}.$$

Приметимо да $0 \leq |W_n| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$, па на основу датих расподела случајних величина W_n и Y_n видимо да можемо очекивати да ће оба низа (W_n) и (Y_n) конвергирати ка 0, као и низ (Z_n) . Средње квадратну конвергенцију испитаћемо директним рачунањем:

$$E|Z_n|^2 = EW_n^2 + 2W_n EY_n + EY_n^2 = \frac{5}{n^2} - 2 \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} = \frac{16}{3n^2} - \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Дакле, да низ (Z_n) конвергира средње квадратно ка 0, одакле следи и $Z_n \xrightarrow{D} 0$, $n \rightarrow \infty$, као и $Z_n \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$.

Испитајмо још скоро сигурну конвергенцију. За свако $\varepsilon > 0$, на основу Чебишевљево неједнакости важи да је

$$P\{|Z_n - 0| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|Z_n|^2}{\varepsilon^2} = \frac{16}{3n^2\varepsilon^2} - \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}\varepsilon^2} \leq \frac{16}{3n^2\varepsilon^2}.$$

Како је $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|Z_n| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{3n^2\varepsilon^2} < +\infty$, то закључујемо да низ Z_n конвергира скоро сигурно ка 0.

Напомена: За карактеристичну функцију φ_X случајне величине X и $a, b \in \mathbb{R}$ важи да је $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)e^{itb}$. Одавде следи да је карактеристична функција општег члана W_n низа случајних величина дата са

$$\varphi_{W_n}(t) = \varphi_{\frac{X_n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{it}{\sqrt{n}}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} e^{\frac{it}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2n} e^{-\frac{3it}{\sqrt{n}}}.$$

Приметимо да важи и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{W_n}(t) = 1$.

2. Нека је X број клијената који долазе на банкомат током једног минута. Тада из услова задатка следи $X \in \mathcal{P}(\lambda)$. Критичну област ћемо тражити помоћу Нејман-Пирсонове леме. Да би лема могла да се примени обе хипотезе морају бити просте. Нулта хипотеза свакако јесте проста, а алтернативну хипотезу напишимо као $H_1 : \lambda = \lambda_1$, $\lambda_1 > 1$, те онда и она јесте проста јер смо параметру доделили тачно једну вредност.

За Нејман-Пирсонову лему је потребно одредити функцију веродостојности која је у овом случају дата са

$$L(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}.$$

Користећи лему, најбоља критична област је одређена са

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \frac{L(x; \lambda_1)}{L(x; 1)} \geq k \right\} = \left\{ \frac{e^{-n\lambda_1} \lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \geq k \right\} = \left\{ \frac{e^{-n\lambda_1} \lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i}}{e^{-n}} \geq k \right\} \\ &= \left\{ e^{-n(\lambda_1-1)} \lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i} \geq k \right\} = \left\{ \lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i} \geq k_1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq c \right\}, \end{aligned}$$

јер је $\lambda_1 > 1$ и $e^{-n(\lambda_1-1)} > 0$, а c је нека константа у односу на дати узорак, коју треба одредити да бисмо добили тачан израз за критичну област. На основу датог прага значајности, можемо одредити c тако да важи

$$P_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq c \right\} = 0.08.$$

Како при H_0 , X има Пуасонову $\mathcal{P}(1)$ расподелу, одакле имамо

$$\sum_{i=1}^n X_i \in \mathcal{P}(n).$$

Сада за конкретан узорак обима $n = 14$, вредност c можемо добити из једначине

$$\begin{aligned} 0.92 = P_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^{14} X_i < c \right\} &\iff 0.92 = P_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^{14} X_i \leq c-1 \right\} \\ c-1 = F_{\mathcal{P}(14)}^{-1}(0.92) &= 19 \implies c = 20. \end{aligned}$$

Дакле, најбоља критична област је

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq 20 \right\}.$$

Коначно, на основу датог узорка добијамо да је

$$\sum_{i=1}^{14} x_i = 14\bar{x}_{14} = 14 \cdot 1.32 = 18.48,$$

што не припада критичној области, па не одбацујемо нулту хипотезу.

3. Приметимо да је σ^2 непознато, па ћемо користити случајну величину $T_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\bar{S}_n} \sqrt{n-1}$, која има Студентову t_{n-1} расподелу. Потребно је да одредимо U_n и V_n такве да важи

$$\begin{aligned} P\{U_n \leq \mu \leq V_n\} &= 0.90, \\ P\{\bar{X}_n - V_n \leq \bar{X}_n - \mu \leq \bar{X}_n - U_n\} &= 0.90, \\ P\left\{ \frac{\bar{X}_n - V_n}{\bar{S}_n} \sqrt{n-1} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\bar{S}_n} \sqrt{n-1} \leq \frac{\bar{X}_n - U_n}{\bar{S}_n} \sqrt{n-1} \right\} &= 0.90. \end{aligned}$$

Из

$$P\left\{ T_n < \frac{\bar{X}_n - V_n}{\bar{S}_n} \sqrt{n-1} \right\} = P\left\{ T_n > \frac{\bar{X}_n - U_n}{\bar{S}_n} \sqrt{n-1} \right\},$$

слиди да је

$$\frac{\bar{X}_n - V_n}{\bar{S}_n} \sqrt{n-1} = -t_{n-1;0.1}, \quad \frac{\bar{X}_n - U_n}{\bar{S}_n} \sqrt{n-1} = t_{n-1;0.1}.$$

Према томе, интервал поверења је

$$I_\mu = \left[\bar{X}_n - \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}} t_{n-1;0.1}, \bar{X}_n + \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}} t_{n-1;0.1} \right],$$

па је дужина интервала

$$L = 2 \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}} t_{n-1;0.1}.$$

Из услова задатка треба да одредимо $c > 0$ тако да важи

$$P\{L \leq c\sigma\} = 0.80,$$

односно

$$P\left\{\bar{S}_n \leq \frac{c\sigma}{2t_{n-1;0.1}} \sqrt{n-1}\right\} = 0.80.$$

Како је $\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} \in \chi_{n-1}^2$, то слиди да је

$$P\left\{\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} \geq \frac{nc^2}{4t_{n-1;0.1}^2} (n-1)\right\} = 0.20,$$

односно

$$\frac{nc^2}{4t_{n-1;0.1}^2} (n-1) = \chi_{n-1,0.2}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 2t_{n-1;0.1} \sqrt{\frac{\chi_{n-1,0.2}^2}{n(n-1)}}.$$

Коначно, за $n = 12$ из таблица слиди да је

$$c = 2t_{11;0.1} \sqrt{\frac{\chi_{11,0.2}^2}{12 \cdot 11}} = 2 \cdot 1.796 \cdot \sqrt{\frac{14.631}{12 \cdot 11}} \approx 1.1959.$$