



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б (ЗР)

ЈАНУАР 1 - 18. август 2025. године

1. Општи члан X_n низа независних случајних величина има експоненцијалну $\mathcal{E}(1)$ расподелу. Ако је

$$Y_n = \frac{\sqrt{X_n}}{\ln n},$$

испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Y_n) .

2. За густину расподеле обележја X важи да је

$$f(x; \theta) = e^{\theta - x}, \quad x \geq \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

За оцену непознатог параметра θ на основу узорка обима n предложене су оцене T_1 и T_2 , где је $T_1 = \hat{\theta} + k$ и $\hat{\theta}$ оцена за θ добијена методом максималне веродостојности, а T_2 оцена добијена методом момената. Одредити k тако да T_1 буде непристрасна оцена, а затим испитати која од предложених оцена је боља у средње квадратном смислу.

3. Из две популације чија су обележја X које има нормалну $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподелу и Y које има нормалну $\mathcal{N}(0, h^2 \sigma^2)$ расподелу, извучена су два независна узорка обима 10 и 12. На основу тих узорака тестира се хипотеза $H_0 : h = 1$ против хипотезе $H_1 : h > 1$ користећи критичну област W , где је

$$W = \left\{ \sum_{k=1}^{10} x_k^2 \leq c \sum_{k=1}^{12} y_k^2 \right\}.$$

Ако је вероватноћа грешке прве врсте тог теста 0.05, одредити вредност параметра h за који је моћ теста 0.99.

$$X \in \mathcal{N}(0, 1) : \Phi^{-1}(0.95) = 1.645, \Phi^{-1}(0.975) = 1.960, \Phi^{-1}(0.99) = 2.326$$

$$X \in t_{10} : F^{-1}(0.95) = 1.812, F^{-1}(0.975) = 2.228, F^{-1}(0.99) = 2.764$$

$$X \in t_{12} : F^{-1}(0.95) = 1.782, F^{-1}(0.975) = 2.179, F^{-1}(0.99) = 2.681$$

$$X \in \chi_{10}^2 : F^{-1}(0.01) = 2.558, F^{-1}(0.05) = 3.940, F^{-1}(0.95) = 18.307, F^{-1}(0.99) = 23.209$$

$$X \in \chi_{12}^2 : F^{-1}(0.01) = 3.571, F^{-1}(0.05) = 5.226, F^{-1}(0.95) = 21.026, F^{-1}(0.99) = 26.217$$

$$X \in \mathcal{F}_{10,12} : F^{-1}(0.01) = 0.213, F^{-1}(0.05) = 0.343, F^{-1}(0.95) = 2.753, F^{-1}(0.99) = 4.296$$

$$X \in \mathcal{F}_{12,10} : F^{-1}(0.01) = 0.233, F^{-1}(0.05) = 0.363, F^{-1}(0.95) = 2.913, F^{-1}(0.99) = 4.706$$

Решења задатака

1. Функција расподеле случајне величине Y_n дата је са

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P\{Y_n \leq y\} = P\left\{\frac{\sqrt{X_n}}{\ln n} \leq y\right\} = P\{X_n \leq y^2 \ln^2 n\} \\ &= F_{X_n}(y^2 \ln^2 n) = 1 - e^{-y^2 \ln^2 n}, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Следи да је

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-y^2 \ln^2 n}, & y \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1, & y \geq 0 \end{cases} = F(y),$$

где је $F(y)$ функција расподеле (дегенерисане) случајне величине 0. Из претходног закључујемо $Y_n \xrightarrow{D} 0$, $n \rightarrow \infty$, као и $Y_n \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$. Испитајмо сада скоро сигурну конвергенцију. Како је за свако $\varepsilon > 0$

$$P\{|Y_n| \geq \varepsilon\} = P\{X_n \geq \varepsilon^2 \ln^2 n\} = e^{-\varepsilon^2 \ln^2 n} = (e^{\ln n})^{-\varepsilon^2 \ln n} = n^{-\varepsilon^2 \ln n} \leq n^{-2},$$

при чему последња неједнакост важи за довољно велико n , па је $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n| \geq \varepsilon\} < \infty$, одакле закључујемо $Y_n \xrightarrow{c.c.} 0$, $n \rightarrow \infty$. У циљу испитивања средње квадратне конвергенције рачунамо $E(Y_n^2)$. Имамо да је редом

$$E(Y_n)^2 = E\left(\frac{X_n}{\ln^2 n}\right) = \frac{1}{\ln^2 n} E(X_n) = \frac{1}{\ln^2 n}$$

Како $E(Y_n)^2 = \frac{1}{\ln^2 n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, следи да низ (Y_n) конвергира средње квадратно.

2. Претпоставимо да имамо реализован узорак $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Функција веродостојности је

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta) = \prod_{k=1}^n e^{\theta - x_k} I\{x_k \geq \theta\} \\ &= \begin{cases} \prod_{k=1}^n e^{\theta - x_k}, & \forall i, x_i \geq \theta, \\ 0, & \exists i, x_i < \theta \end{cases} \\ &= e^{n\theta - \sum_{k=1}^n x_k} I\{x_{(1)} \geq \theta\} \end{aligned}$$

Приметимо да функција веродостојности није диференцијабилна по θ . Да би функција $L(\theta)$ имала максимум, потребно је да индикатор узме вредност 1, у супротном функција веродостојности је 0. Како је функција $\exp(x)$ растућа по x , то максимум достиже на десном крају интервала, те добијамо да је оцена максималне веродостојности

$$\hat{\theta} = X_{(1)}.$$

Да бисмо одредили k , тако да T_1 буде непристрасна оцена, треба да важи

$$E(T_1) = E(\hat{\theta} + k) = E(\hat{\theta}) + k = \theta.$$

За функцију расподеле случајне величине X важи

$$F_X(x) = \int_{\theta}^x e^{\theta - t} dt = 1 - e^{-\theta - x}, \quad x \geq \theta.$$

Са друге стране, важи да је

$$\begin{aligned} F_{\hat{\theta}}(x) &= P\{\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x\} = 1 - P\{\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x\} = 1 - (P\{X_1 > x\})^n \\ &= 1 - (1 - P\{X_1 \leq x\})^n = 1 - e^{n(\theta-x)}, \quad x \geq \theta. \end{aligned}$$

па је густина случајне величине $\hat{\theta}$ дата са

$$f_{\hat{\theta}}(x) = (F_{\hat{\theta}}(x))' = ne^{n(\theta-x)}, \quad x \geq \theta.$$

Сада је

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \int_{\theta}^{\infty} xne^{n(\theta-x)} dx = \left(-xe^{n(\theta-x)} \right) \Big|_{x=\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty} e^{n(\theta-x)} dx \\ &= \theta - \frac{1}{n} e^{n(\theta-x)} \Big|_{x=\theta}^{\infty} = \theta + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Према томе, приметимо да оцена $\hat{\theta}$ није непристрасна, али јесте асимптотски непристрасна јер

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\theta + \frac{1}{n} \right) = \theta.$$

Очигледно за $k = -\frac{1}{n}$, оцена T_1 ће бити непристрасна оцена параметра θ . Одредимо још дисперзију оцено T_1 . Важи да је

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}^2) &= \int_{\theta}^{\infty} x^2 ne^{n(\theta-x)} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2, & dv = ne^{n(\theta-x)} dx \\ du = 2x dx, & v = -e^{n(\theta-x)} \end{array} \right] \\ &= \left(-x^2 e^{n(\theta-x)} \right) \Big|_{x=\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty} 2xe^{n(\theta-x)} dx \\ &= \theta^2 + 2 \frac{1}{n} \int_{\theta}^{\infty} nxe^{n(\theta-x)} dx = \theta^2 + 2 \frac{1}{n} \left(\theta + \frac{1}{n} \right) \\ &= \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

Дисперзија оцено T_1 је једнака

$$D(T) = D\left(\hat{\theta} - \frac{1}{n}\right) = D(\hat{\theta}) + D\left(\frac{1}{n}\right) = E(\hat{\theta}^2) - (E(\hat{\theta}))^2 = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2} - \left(\theta + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}.$$

Пошто је T_1 непристрасна оцена параметра θ , то је

$$MSE(T_1) = E(T_1 - \theta)^2 = E(T_1 - ET_1)^2 = D(T_1) = \frac{1}{n^2}.$$

Са друге стране, из

$$\begin{aligned} EX &= \int_{\theta}^{\infty} xe^{\theta-x} dx = e^{\theta} \int_{\theta}^{\infty} xe^{-x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = e^{-x} dx \\ du = dx, & v = -e^{-x} \end{array} \right] \\ &= e^{\theta} \left(\left(-xe^{-x} \right) \Big|_{x=\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty} e^{-x} dx \right) = e^{\theta} (\theta e^{-\theta} + e^{-\theta}) \\ &= \theta + 1, \end{aligned}$$

и изједначавањем $EX = \bar{X}_n$ добијамо да је $T_2 = \bar{X}_n - 1$.

Како је

$$E(T_2) = E(\bar{X}_n - 1) = EX - 1 = (\theta + 1) - 1 = \theta,$$

то је оцена T_2 непристрасна оцена параметра θ . Одредимо још дисперзију оцено T_2 . Важи да је

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{\theta}^{\infty} x^2 e^{\theta-x} dx = e^{\theta} \int_{\theta}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = e^{\theta} \left(\left(-x^2 e^{-x} \right) \Big|_{x=\theta}^{\infty} + 2 \int_{\theta}^{\infty} x e^{-x} dx \right) \\ &= e^{\theta} \left(\theta^2 e^{-\theta} + 2 \left(\left(-x e^{-x} \right) \Big|_{x=\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty} e^{-x} dx \right) \right) \\ &= \theta^2 + 2\theta + 2, \end{aligned}$$

па је

$$D(T_2) = D(\bar{X}_n - 1) = \frac{DX}{n} = \frac{1}{n} (EX^2 - (EX)^2) = \frac{1}{n} (\theta^2 + 2\theta + 2 - (\theta + 1)^2) = \frac{1}{n}.$$

Пошто је T_2 непристрасна оцена, то је

$$MSE(T_2) = D(T_2) = \frac{1}{n}.$$

Коначно, како за свако $n \geq 2$ важи да је $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, то је $MSE(T_1) < MSE(T_2)$, па је оцена T_1 боља у средње квадратном смислу.

3. Нека је

$$U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{10} X_k^2, \quad V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{12} Y_k^2.$$

Јасно, како је $\frac{X_k}{\sigma} \in \mathcal{N}(0, 1)$, то је $\frac{X_k^2}{\sigma^2} \in \chi_1^2$, па следи да је $U \in \chi_{10}^2$. При $H_0 : h = 1$, слично добијамо и да је $V \in \chi_{12}^2$. Вредност константе c можемо одредити из услова за грешку прве врсте:

$$P_{H_0} \left\{ \frac{U}{V} \leq c \right\} = 0.05.$$

Како су U и V независне, то при H_0 , користећи чињеницу

$$\frac{12U}{10V} \in \mathcal{F}_{10,12} \implies \frac{10V}{12U} \in \mathcal{F}_{12,10},$$

коначно можемо одредити вредности константе c :

$$P_{H_0} \{W \leq c\} = P_{H_0} \left\{ \frac{U}{V} \leq c \right\} = P_{H_0} \left\{ \frac{V}{U} \geq \frac{1}{c} \right\} = P_{H_0} \left\{ \frac{10V}{12U} \geq \frac{10}{12} \frac{1}{c} \right\} = 0.05,$$

па је

$$\frac{10}{12} \frac{1}{c} = F_{\mathcal{F}_{12,10}}^{-1}(0.95) = 2.91 \implies c = 0.286.$$

Дакле, критична област је

$$W = \left\{ \frac{U}{V} \leq 0.286 \right\}.$$

Нека је $Y_k = hZ_k$, где је $Z_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Тада

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{12} Y_k^2 = \frac{h^2}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{12} Z_k^2 = h^2 Z, \quad Z \in \chi_{12}^2.$$

Уведимо стандардну $\mathcal{F}$ -статистику при H_1 :

$$F^* = \frac{U/10}{(V/h^2)/12} \in \mathcal{F}_{10,12}.$$

Пошто је наша критична област заснована на односу U/V , имамо

$$\frac{U}{V} = \frac{10}{12} \cdot \frac{1}{h^2} F^*.$$

Сада је моћ теста при H_1 дата са

$$\pi(h) = P_{H_1} \left\{ \frac{U}{V} \leq c \right\} = P \left\{ F^* \leq h^2 \frac{12}{10} \cdot 0.286 \right\} = F_{\mathcal{F}_{10,12}}(0.343 \cdot h^2) = 0.99.$$

Одавде следи да је

$$h^2 = \frac{F_{\mathcal{F}_{10,12}}^{-1}(0.99)}{0.343}, \quad h = \sqrt{\frac{F_{\mathcal{F}_{10,12}}^{-1}(0.99)}{0.343}}.$$

Из таблице је $F_{\mathcal{F}_{10,12}}^{-1}(0.99) = 4.29$, па добијамо да је

$$h^2 = \frac{4.29}{0.343} \approx 12.507, \quad h \approx 3.536.$$