



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЈ)

ЈУН 1 - 12. септембар 2025. године

1. Ана окреће точак среће са 8 једнаких кружних исечака, при чему је један кружни исечак обележен као "бонус". Ако казаљка стане на "бонус" кружни исечак, Ана извлачи 3 листића, један по један, без враћања, из кутије која садржи 7 листића са 4 поена и 3 листића са -1 поеном, а у супротном извлачи 2 листића, без враћања, из кутије која садржи 3 листића са 6 поена и 7 листића са 1 поеном. Израчунати очекивани укупан број поена на извученим листићима.
2. За случајну величину X важи да је $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}$, за $k \in \mathbb{N}$. Нека су случајне величине Y и Z независне, где је $Y = \sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)$, а Z има униформну $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелу. Ако је $W = Y^2 + Z$, одредити расподелу случајне величине W .
3. Нека су X и Y независне случајне величине са истом експоненцијалном $\mathcal{E}(1)$ расподелом. Ако је $U = I\{X < Y\}$ и

$$V = \frac{X - Y}{X + Y},$$

одредити коефицијент корелације случајних величина U и V .

Решења задатака

1. Нека случајна величина Z представља укупан број поена на извученим листићима. Тада, $Z \in \{-3, 2, 7, 12\}$. Нека је A догађај да је казаљка стала на "бонус" кружни исечак. Тада је $P(A) = \frac{1}{8}$ и $P(A^c) = \frac{7}{8}$. Даље, имамо да важи да је

$$\begin{aligned} P\{Z = -3\} &= P\{Z = -3 | A\}P(A) + P\{Z = -3 | A^c\}P(A^c) = \frac{3}{10} \frac{2}{9} \frac{1}{8} \frac{1}{8} = \frac{1}{960}, \\ P\{Z = 2\} &= P\{Z = 2 | A\}P(A) + P\{Z = 2 | A^c\}P(A^c) = 3 \frac{7}{10} \frac{3}{9} \frac{2}{8} \frac{1}{8} + \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{7}{8} = \frac{413}{960}, \\ P\{Z = 7\} &= P\{Z = 7 | A\}P(A) + P\{Z = 7 | A^c\}P(A^c) = 3 \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{3}{8} \frac{1}{8} + 2 \frac{3}{10} \frac{7}{9} \frac{7}{8} = \frac{455}{960}, \\ P\{Z = 12\} &= P\{Z = 12 | A\}P(A) + P\{Z = 12 | A^c\}P(A^c) = \frac{7}{10} \frac{6}{9} \frac{5}{8} \frac{1}{8} + \frac{3}{10} \frac{2}{9} \frac{7}{8} = \frac{91}{960}. \end{aligned}$$

Дакле, закон расподеле случајне величине Z је дат са

$$Z : \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & 12 \\ \frac{1}{960} & \frac{413}{960} & \frac{455}{960} & \frac{91}{960} \end{pmatrix},$$

па је $E(Z) = -3 \cdot \frac{1}{960} + 2 \cdot \frac{413}{960} + 7 \cdot \frac{455}{960} + 12 \cdot \frac{91}{960} = \frac{1068}{960} \approx 1.1125$.

2. Приметимо да је

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 2k, \\ 1, & \text{за } n = 4k + 1, \\ -1, & \text{за } n = 4k + 3. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Закон расподеле за случајну величину Y добијамо сумирањем одговарајућих вредности за случајну величину X , тј. имамо да је

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = 2k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \\ P\{Y = 1\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = 4k + 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}, \end{aligned}$$

а преосталу вероватноћу можемо лако добити као

$$P\{Y = -1\} = 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} = \frac{2}{15}.$$

Дакле, закон расподеле случајне величине Y дат је са

$$Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix},$$

одакле је

$$Y^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Функција расподеле случајне величине Z је

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

Треба одредити

$$F_W(w) = P\{W \leq w\} = P\{Y^2 + Z \leq w\} = (\star)$$

Разликујемо случајеве:

- $w < 0$: $(\star) = 0$,
- $0 \leq w < 1$:

$$\begin{aligned} (\star) &= P\{Y^2 = 0, Z \leq w\} + P\{Y^2 = 1, Z \leq w - 1\} \\ &= P\{Y^2 = 0\}P\{Z \leq w\} \\ &= \frac{1}{3}w. \end{aligned}$$

- $1 \leq w < 2$:

$$\begin{aligned} (\star) &= P\{Y^2 = 0, Z \leq w\} + P\{Y^2 = 1, Z \leq w - 1\} \\ &= P\{Y^2 = 0\} + P\{Y^2 = 1\}P\{Z \leq w - 1\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (w - 1). \end{aligned}$$

- $w \geq 2$: $(\star) = 1$

Дакле, функција расподеле случајне величине W је

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 0 \\ \frac{1}{3}w, & 0 \leq w < 1 \\ \frac{2}{3}w - \frac{1}{3}, & 1 \leq w < 2 \\ 1, & w \geq 2. \end{cases}$$

3. Функција расподеле случајне величине V дата је са

$$F_V(v) = P\{V \leq v\} = P\left\{\frac{X - Y}{X + Y} \leq v\right\} = P\{X - Y \leq v(X + Y)\} = P\{(1 - v)X \leq (1 + v)Y\},$$

јер је $X + Y > 0$. Разликујемо следеће случајеве

- (а) за $1 - v \leq 0$, тј. $v \geq 1$ важи да је

$$F_V(v) = P\{(1 - v)X \leq (1 + v)Y\} = 1,$$

јер је $(1 - v)X \leq 0$ и $(1 + v)Y \geq 0$.

- (б) за $v \in (-1, 1)$ и $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y \geq \frac{1-v}{1+v}x\right\}$ важи да је

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \iint_D e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^\infty \left(\int_{\frac{1-v}{1+v}x}^\infty e^{-y} dy \right) e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{\frac{v-1}{v+1}x} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-\frac{2}{1+v}x} dx \\ &= \frac{1+v}{2}. \end{aligned}$$

- (в) за $1 + v \leq 0$, тј. $v \leq -1$ важи да је

$$F_V(v) = P\{(1 - v)X \leq (1 + v)Y\} = 0,$$

јер је $(1 - v)X \geq 0$ и $(1 + v)Y \leq 0$.

Дакле, за густину расподеле случајне величине V важи да је

$$f_V(v) = \frac{1}{2}, \quad v \in (-1, 1).$$

Закључујемо да случајна величина V има униформну $\mathcal{U}(-1,1)$ расподелу, па је $EV = 0$ и $DV = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$.

Како је $U = I\{X < Y\} = I\{X - Y < 0\} = I\{V < 0\}$, то важи да случајна величина U има Бернулијеву $Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ расподелу, па је

$$EU = \frac{1}{2}, \quad DU = \frac{1}{4}.$$

Да бисмо израчунали коефицијент корелације, треба још да израчунамо $E(UV)$.

$$E(UV) = E(I\{V < 0\}V) = \int_{-1}^0 v f_V(v) dv = \int_{-1}^0 \frac{u}{2} du = -\frac{1}{4}.$$

Коначно, добијамо да је коефицијент корелације

$$\rho_{U,V} = \frac{E(UV) - EU EV}{\sqrt{DU} \sqrt{DV}} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866.$$

Напомена: За EU важи да је

$$EU = EI\{X < Y\} = P\{X < Y\} = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^\infty e^{-2x} dx = \frac{1}{2}.$$

Такође, како је $U^2 = U$, то је $EU^2 = EU$, па је $DU = EU^2 - (EU)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Поред тога, $E(UV)$ можемо одредити и на следећи начин:

$$E(UV) = \iint_{0 < x < y < \infty} \frac{x-y}{x+y} e^{-x} e^{-y} dy dx.$$

Уведимо смену $y = xs$, $s \geq 1$. Тада следи да је

$$E(UV) = \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{1-s}{1+s} x e^{-x(1+s)} ds dx = \int_1^\infty \frac{1-s}{1+s} \left(\int_0^\infty x e^{-x(1+s)} dx \right) ds = \int_1^\infty \frac{1-s}{(1+s)^3} ds.$$

Након смене $t = 1 + s$, добијамо да је

$$E(UV) = \int_1^\infty \frac{1-s}{(1+s)^3} ds = \int_2^\infty \left(\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[-\frac{1}{t^2} \right]_2^\infty - \left[-\frac{1}{t} \right]_2^\infty = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$