

Тестирање статистичких хипотеза

Задатак 1. У кутији је 10 куглица, црвених и белих. Тестира се (нулта) хипотеза H_0 (у кутији су 2 црвене и 8 белих куглица) против (алтернативне) хипотезе H_1 (у кутији су више од 2 црвене куглице), тако што се из кутије извлаче две куглице једна за другом, без враћања, па ако су обе извучене куглице црвене, хипотеза H_0 се одбацује, иначе се не одбацује. Израчунати вероватноћу грешке прве врсте и функцију моћи тог теста.

Решење. Ако са θ означимо број црвених куглица у кутији, онда се нулта и алтернативна хипотеза могу написати као

$$H_0(\theta = 2) \quad H_1(\theta > 2).$$

Пошто је критична област у ствари област одбацивања нулте хипотезе, из текста задатка можемо видети да се H_0 одбацује ако су обе извучене куглице црвене. Односно, критична област W је скуп свих узорака у којима су извучене две црвене куглице. Вероватноћа грешке прве врсте је према томе

$$\alpha = P_{H_0}\{\mathbf{X}_n \in W\} = \frac{2}{10} \frac{1}{9} = \frac{1}{45},$$

при чему је коришћено да је у питању извлачење две куглице једне за другом без враћања. Функција моћи теста је

$$M(\theta) = P_{\theta}\{\mathbf{X}_n \in W\} = \frac{\theta}{10} \frac{\theta - 1}{9} = \frac{\theta(\theta - 1)}{90}.$$

✓

Задатак 2. Нека је хипотеза H_0 (обележје X има густину расподеле $f_0(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$), а хипотеза H_1 (обележје X има густину расподеле $f_1(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$). На основу узорка (X_1, X_2) треба се одредити за једну од ове две хипотезе. Предложена су два теста чије су критичне области $W_1 = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq k_1, x_2 \geq k_1\}$, односно $W_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \geq k_2\}$, оба са истим прагом значајности α , где је $\alpha = \frac{1}{8}$. Испитати који је тест бољи. Подразумева се да је познато да обележје X узима вредности из сегмента $[0, 1]$.

Решење. Наведене хипотезе, иако су дате као непараметарске, могу се преформулисати у параметарске на следећи начин: претпоставимо да обележје има фамилију густина расподеле $f(x, \theta) = (2x)^\theta$, $x \in [0, 1]$, $\theta \in \{0, 1\}$, и да желимо да тестирамо хипотезу $H_0(\theta = 0)$ против алтернативе $H_1(\theta = 1)$. У наставку можемо користити све што је наведено за параметарске хипотезе.

- Хоћемо да праг значајности првог теста буде $\frac{1}{8}$. Дакле треба да буде

$$\begin{aligned} P_{H_0}\{(X_1, X_2) \in W_1\} &= \frac{1}{8} \\ \iff P_{H_0}\{X_1 \geq k_1, X_2 \geq k_1\} &= \frac{1}{8} \\ \iff \left(P_{H_0}\{X_1 \geq k_1\}\right)^2 &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Како је

$$P_{H_0}\{X_1 \geq k_1\} = \int_{k_1}^1 (2x)^0 dx = 1 - k_1,$$

треба да буде

$$(1 - k_1)^2 = \frac{1}{8},$$

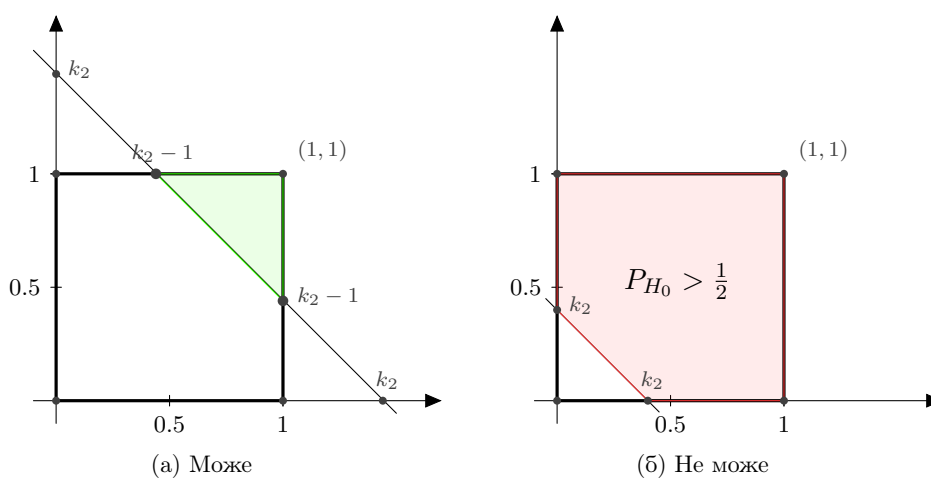
односно

$$k_1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{4} \approx 0.65.$$

- Да би праг значајности другог теста био $\frac{1}{8}$ треба да је

$$P_{H_0}\{X_1 + X_2 \geq k_2\} = P_{H_0}\{X_1 \geq k_2 - X_2\} = \frac{1}{8}.$$

Разликујемо две области интеграције за рачунање ове вероватноће - за $k_2 > 1$ и $k_2 < 1$, илустроване на слици. Примећујемо да је за црвену област вероватноћа под нултом хипотезом (униформна расподела) већа од $\frac{1}{2}$ за све $k_2 < 1$, па у том случају не може праг значајности да буде $\frac{1}{8}$, те тај случај одбацујемо.



Слика 1: Области интеграције за $k_2 > 1$ и $k_2 < 1$

Остаје нам да се фокусирамо само на случај када је $k_2 > 1$ и израчунамо вероватноћу

$$\begin{aligned} P_{H_0}\{X_1 \geq k_2 - X_2\} &= \int_{k_2-1}^1 \int_{k_2-x_2}^1 1 \cdot dx_1 dx_2 \\ &= \int_{k_2-1}^1 (1 - k_2 + x_2) dx_2 \\ &= (1 - k_2)(1 - k_2 + 1) + \frac{1}{2}(1 - (k_2 - 1)^2) \\ &= \frac{1}{2}(k_2^2 - 4k_2 + 4). \end{aligned}$$

Изједначавањем овог израза са $\frac{1}{8}$ добијамо

$$\begin{aligned} (k_2 - 2)^2 &= \frac{1}{4} \\ 2 - k_2 &= \frac{1}{2} \quad (\text{јер } k_2 \leq 2) \\ k_2 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, критичне области тестова су

$$W_1 = \{x_1 \geq 0.65, x_2 \geq 0.65\} \text{ и } W_2 = \{x_1 + x_2 \geq 1.5\}.$$

Моћи ових тестова су

$$\gamma_1 = P_{H_1}\{X_1 \geq 0.65, X_2 \geq 0.65\} = P_{H_1}\{X_1 \geq 0.65\}^2 = \left(\int_{0.65}^1 2x dx\right)^2 = (1 - 0.65^2)^2 = 0.3335$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= P_{H_1}\{X_1 + X_2 \geq 1.5\} = \int_{0.5}^1 \int_{1.5-x_2}^1 2x_1 \cdot 2x_2 dx_1 dx_2 = \int_{0.5}^1 2x_2 \left(\int_{1.5-x_2}^1 2x_1 dx_1\right) dx_2 \\ &= \int_{0.5}^1 2x_2(-x_2^2 + 3x_2 - 1.25) dx_2 = 2\left(-\frac{x_2^4}{4} + 3\frac{x_2^3}{3} - 0.625x_2^2\right)\Big|_{0.5}^1 = 0.34375 \end{aligned}$$

Како је $\gamma_2 > \gamma_1$, закључујемо да је други тест бољи, односно моћнији.

✓

Задатак 3. Нека је хипотеза $H_0\left(X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}\right)$, а хипотеза $H_1\left(X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.01 & 0.42 & 0.01 & 0.01 & 0.5 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}\right)$. Са прагом значајности 0.03, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе H_0 против хипотезе H_1 на основу узорка обима 2. Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тако одабраног теста.

Решење. Праг значајности је $\alpha = 0.03$, имамо узорак $\mathbf{X}_2 = (X_1, X_2)$ и тражимо најбољу критичну област W . Због прага значајности, потребно је да важи

$$P_{H_0}\{(X_1, X_2) \in W\} \leq 0.03. \quad (1)$$

За произвољне $k_1, k_2 \in \{1, \dots, 10\}$ је

$$P_{H_0}\{(X_1, X_2) = (k_1, k_2)\} = 0.1^2 = 0.01.$$

Критична област W ће бити неки скуп облика $\{(k_{i1}, k_{i2}) \mid i\}$, па ће важити

$$P_{H_0}\{(X_1, X_2) \in W\} = |W| \cdot 0.01.$$

Дакле, вероватноћа под нултом хипотезом да $\mathbf{X}_2$ упадне у критичну област W је сразмерна броју парова у W . Да бисмо имали што већу моћ, желимо да W има што више чланова, али због услова (1), највише можемо имати 3 пара у W .

Критична област ће стога бити облика $W = \{(k_{11}, k_{12}), (k_{21}, k_{22}), (k_{31}, k_{32})\}$.

Моћ теста је

$$\begin{aligned} P_{H_1}\{(X_1, X_2) \in W\} &= P_{H_1}\{X_1 = k_{11}, X_2 = k_{12}\} + P_{H_1}\{X_1 = k_{21}, X_2 = k_{22}\} \\ &\quad + P_{H_1}\{X_1 = k_{31}, X_2 = k_{32}\}, \end{aligned}$$

а овај збир је највећи када је критична област баш

$$W = \{(5, 5), (5, 2), (2, 5)\},$$

јер је под алтернативном хипотезом вероватноћа за вредности 2 и 5 највећа.

Дакле, моћ овог теста је

$$\gamma = P_{H_1}\{(X_1, X_2) \in W\} = 0.5^2 + 2 \cdot 0.42 \cdot 0.5 = 0.67,$$

па је вероватноћа грешке II врсте $\beta = 1 - \gamma = 0.33$.

✓

Нејман–Пирсонова лема и униформно најмоћнији тест

Уколико није унапред позната критична област, потребан нам је начин за одређивање W . Један могући начин је коришћењем Нејман–Пирсонове леме која, при одређеним условима, даје најбољу критичну област, а самим тим и најбољи тест за тестирање одговарајућих хипотеза.

Лема 1 (Нејман–Пирсон). *Ако се тестира хипотеза $H_0(\theta = \theta_0)$ против алтернативе $H_1(\theta = \theta_1)$ тада постоји најмоћнији тест са критичном облашћу W која је мере α , односно*

$$P_{H_0}\{\mathbf{X}_n \in W\} = \alpha,$$

за коју важи да

$$W = \{L(\theta_1) \geq cL(\theta_0)\},$$

за одговарајуће $c > 0$, где је $L(\theta)$ функција веродостојности. ★

Ако је $L(\theta) > 0$ за свако θ , онда се критична област може написати као

$$W = \left\{ \frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} \geq c \right\}$$

Тест је **униформно најмоћнији** (УНМ) за тестирање $H_0(\theta \in \Theta_0)$ против $H_1(\theta \in \Theta_1)$ ако је најмоћнији за тестирање свих хипотеза облика $H'_0(\theta = \theta_0)$ против $H'_1(\theta = \theta_1)$ за сваки избор $\theta_0 \in \Theta_0$ и $\theta_1 \in \Theta_1$.

Када се тестирају хипотезе облика $H_0(\theta = \theta_0)$ против $H_1(\theta \in \Theta_1)$, најбољи тест за тестирање $H_0(\theta = \theta_0)$ против $H'_1(\theta = \theta_1)$, $\theta_1 \in \Theta_1$ (добijen из леме Нејман–Пирсона), је уједно и униформно најмоћнији тест уколико његова критична област не зависи од вредности параметра θ_1 из алтернативе.

Задатак 4. Обележје X има нормалну $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподелу, где је σ^2 непознати параметар. Са прагом значајности 0.05, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\sigma^2 = 1)$ против хипотезе $H_1(\sigma^2 = 2)$ на основу узорка обима 10.

Решење. Пошто треба тестирати просту нулту хипотезу против просте алтернативне хипотезе можемо за одређивање најбоље критичне области, а самим тим и најбољег теста, користити Нејман–Пирсонову лему. За одређивање критичне области, на основу узорка обима $n = 10$, потребна нам је функција веродостојности која је у овом случају

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Користећи лему и то да је $L(\theta) > 0$ за свако θ , критична област је

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \frac{L(2)}{L(1)} \geq k \right\} = \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} \right)^n e^{-\frac{1}{2 \cdot 2} \sum_{i=1}^n x_i^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2}} \geq k \right\} = \left\{ \frac{1}{2^n} e^{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2} \geq k \right\} \\ &= \left\{ e^{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2} \geq k_1 \right\} = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq k_2 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq c \right\}. \end{aligned}$$

Дакле, добијена критична област је одређена реализованом вредношћу статистике $\sum_{i=1}^n X_i^2$. На основу датог прага значајности, можемо одредити c тако да важи

$$P_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^2 \geq c \right\} = 0.05. \quad (2)$$

Како при H_0 , $X_i \in \mathcal{N}(0, 1)$, познато је да $X_i^2 \in \chi_1^2$. Пошто је χ^2 расподела адитивна, следи да $\sum_{i=1}^n X_i^2 \in \chi_n^2$. Користећи таблице χ^2 расподеле, $n = 10$ и (2), добија се да је

$$c = \chi_{10;0.05}^2 = 18.307.$$

Дакле, најбоља критична област за тестирање хипотезе $H_0(\sigma^2 = 1)$ против хипотезе $H_1(\sigma^2 = 2)$ на основу узорка обима 10 је

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 18.307 \right\}.$$

✓

Задатак 5. Из популације чије обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$ расподелу извучен је узорак обима n .

- Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\lambda = 1)$ против хипотезе $H_1(\lambda \neq 1)$ ($H_1(\lambda = \lambda_1)$, $\lambda_1 \neq 1$).
- Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији за тестирање хипотезе $H_0(\lambda = 1)$ против хипотезе $H_1(\lambda \neq 1)$.
- Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тог теста ако је обим узорка 100, алтернативна хипотеза $H_1(\lambda = 2)$, а праг значајности 0.05.

Решење. а) Критичну област ћемо тражити помоћу леме Нејман-Пирсона. Да би лема могла да се примени обе хипотезе морају бити просте. Нулта хипотеза свакако јесте проста, међутим иницијално наведена алтернативна хипотеза $H_1(\lambda \neq 1)$ није. Ако алтернативну хипотезу напишемо као $H_1(\lambda = \lambda_1)$, $\lambda_1 \neq 1$, онда она јесте проста хипотеза јер смо параметру доделили тачно једну вредност (λ_1). За Нејман-Пирсонову лему је потребно одредити функцију веродостојности која је у овом случају

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Користећи лему и то да је $L(\lambda) > 0$ за свако λ , најбоља критична област је одређена са

$$\begin{aligned} W = \left\{ \frac{L(\lambda_1)}{L(1)} \geq k_1 \right\} &= \left\{ \frac{\frac{1}{\lambda_1^n} e^{-\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n x_i}}{e^{-\sum_{i=1}^n x_i}} \geq k_1 \right\} = \left\{ e^{-(\frac{1}{\lambda_1} - 1) \sum_{i=1}^n x_i} \geq k_2 \right\} \\ &= \left\{ -\left(\frac{1}{\lambda_1} - 1\right) \sum_{i=1}^n x_i \geq k_3 \right\} = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq c \right\}, & \lambda_1 > 1 \\ \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \leq c \right\}, & \lambda_1 < 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Дакле, добијена критична област је одређена реализованом вредношћу статистике $\sum_{i=1}^n X_i$. На основу датог прага значајности, у сваком од претходна два случаја, можемо одредити c тако да важи

$$P_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \geq c \right\} = \alpha,$$

у првом случају, односно

$$P_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \leq c \right\} = \alpha,$$

у другом случају. Како $X_i \in \mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$, познато је да $\sum_{i=1}^n X_i \in \gamma(n, \frac{1}{\lambda})$. Односно, користећи везу између гама и χ^2 расподеле, важи $\frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^n X_i \in \chi_{2n}^2$. Дакле, при $H_0(\lambda = 1)$, $2 \sum_{i=1}^n X_i \in \chi_{2n}^2$. Према томе, добија се да је

$$P_{H_0} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_i \geq 2c \right\} = \alpha,$$

и $c = \frac{1}{2} \chi_{2n;\alpha}^2$ у првом случају, односно

$$P_{H_0} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n X_i \leq 2c \right\} = \alpha,$$

и $c = \frac{1}{2} \chi_{2n;1-\alpha}^2$ у другом случају.

Дакле, најбоља критична област за тестирање хипотезе $H_0(\lambda = 1)$ против хипотезе $H_1(\lambda = \lambda_1)$, $\lambda_1 \neq 1$, на основу узорка обима n је

$$W = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{1}{2} \chi_{2n;\alpha}^2 \right\}, & \lambda_1 > 1 \\ \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{2} \chi_{2n;1-\alpha}^2 \right\}, & \lambda_1 < 1 \end{cases}.$$

- б) Видимо да критична област у овом случају зависи од вредности λ_1 из алтернативе, па овај тест није униформно најмоћнији.
- в) За $\lambda_1 = 2$, $\alpha = 0.05$ и $n = 100$ вредност константе c и моћ теста можемо тражити користећи централну граничну теорему, будући да је n довољно велико.

Како при H_0 знамо да $\sum_{i=1}^n X_i \in \gamma(n, 1)$, закључујемо да ће при H_0 бити $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n = 100$ и $D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n = 100$.

Критична област за ову алтернативу је $W = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq c \right\}$, јер је $\lambda_1 = 2 > 1$.

Прво ћемо одредити вредност c решавањем једначине

$$P_{H_0} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \geq c \right\} = 0.05,$$

односно

$$0.95 = P_{H_0} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 100}{10} < \frac{c - 100}{10} \right\} \approx \Phi \left(\frac{c - 100}{10} \right),$$

одакле добијамо

$$\frac{c - 100}{10} = \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64,$$

односно $c = 116.4$. Критична област теста нам је дакле $W = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \geq 116.4 \right\}$.

При $H_1(\lambda = 2)$ знамо да $\sum_{i=1}^n X_i \in \gamma(n, \frac{1}{2})$, па је $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 200$ и $D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 400$.

Вероватноћу грешке друге врсте рачунамо по формули

$$\beta = P_{H_1} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < 116.4 \right\} = P_{H_1} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 200}{20} < \frac{116.4 - 200}{20} \right\} = \Phi(-4.1775) \approx 0.$$

✓

Задатак 6. Обележје X има густину расподеле $f(x; \theta) = \frac{1-\theta}{x^\theta}$, $x \in (0, 1)$, где је θ непознати параметар такав да је $\theta \in [0, 1)$.

- Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\theta = 0)$ против хипотезе $H_1(\theta = \theta_0)$, $\theta_0 > 0$, на основу узорка обима n .
- Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији тест за тестирање хипотезе $H_0(\theta = 0)$ против хипотезе $H_1(\theta > 0)$.
- Одредити функцију моћи $M(\theta)$ тог теста ако је обим узорка 2, а праг значајности α .

Решење. а) Критичну област ћемо тражити помоћу леме Нејман-Пирсона. Да би лема могла да се примени обе хипотезе морају бити просте, што овде и јесте случај. За Нејман-Пирсонову лему је потребно одредити функцију веродостојности која је у овом случају:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \frac{(1 - \theta)^n}{\prod_{i=1}^n x_i^\theta}.$$

Користећи лему, најбоља критична област је одређена са:

$$W = \left\{ \frac{L(\theta_0)}{L(0)} \geq k \right\} = \left\{ \frac{(1 - \theta_0)^n}{\prod_{i=1}^n x_i^{\theta_0}} \geq k \right\} = \left\{ \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\theta_0} \leq k_1 \right\} = \left\{ \prod_{i=1}^n x_i \leq c \right\}.$$

Дакле, добијена критична област је одређена реализованом вредношћу статистике $\prod_{i=1}^n X_i$. На основу прага значајности α , требало би одредити c тако да важи

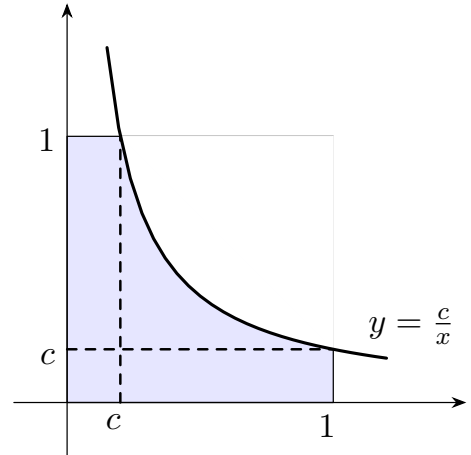
$$P_{H_0} \left\{ \prod_{i=1}^n X_i \leq c \right\} = \alpha.$$

С обзиром да, при H_0 , $X_i \in \mathcal{U}(0, 1)$, није позната расподела статистика $\prod_{i=1}^n X_i$ у општем случају. Према томе, константа c би могла да се одреди неким нумеричким методама за конкретно дате n и α .

- б) Видимо да критична област у овом случају не зависи од вредности θ_0 из алтернативе хипотезе, па је овај тест униформно најмоћнији.
- в) За $n = 2$ и α , критична област је $W = \{x_1 x_2 \leq c\}$, а функција моћи теста је облика $M(\theta) = P_\theta\{X_1 X_2 \leq c\}$. Остаје још да одредимо c за дато фиксирано α .

Како је α праг значајности, важи једнакост:

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}\{X_1 X_2 \leq c\} \\ &= \int \int_{xy \leq c} f(x; 0) f(y; 0) dx dy \\ &= 1 - \int_c^1 \int_{\frac{c}{x}}^1 dy dx \\ &= c(1 - \ln c)\end{aligned}$$



Праг значајности α можемо посматрати као функцију по c : $\alpha(c) = c(1 - \ln c)$. Како је

- α непрекидна функција по c ,
- $\alpha'(c) = -\ln c > 0$ (јер је $c \in (0, 1)$), тј. функција $\alpha(c)$ је растућа на интервалу $(0, 1)$,
- $\alpha(c) \rightarrow 0, c \rightarrow 0$ и $\alpha(c) \rightarrow 1, c \rightarrow 1$,

можемо закључити да за свако $\alpha \in (0, 1)$ постоји јединствено c такво да важи једнакост $c(1 - \ln c) = \alpha$, која се може решити нумерички.

Функција моћи теста је:

$$\begin{aligned}M(\theta) &= P_\theta\{X_1 X_2 \leq c\} = \int \int_{xy \leq c} \frac{(1-\theta)^2}{x^\theta y^\theta} dx dy \\ &= 1 - \int \int_{xy > c} \frac{(1-\theta)^2}{x^\theta y^\theta} dx dy = 1 - \int_c^1 \int_{\frac{c}{y}}^1 \frac{(1-\theta)^2}{x^\theta y^\theta} dx dy \\ &= 1 - \int_c^1 \left(\frac{1-\theta}{y^\theta} - \frac{1-\theta}{y} c^{1-\theta} \right) dy \\ &= c^{1-\theta} (1 - (1-\theta) \ln c).\end{aligned}$$

✓