



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ)

1. јун 2024. године

1. Ана и Тамара свако јутро пре одласка на факултет пију кафу у Кафетерији. Оне долазе у Кафетерију независно једна од друге у случајном тренутку између 9:00 и 10:00 часова. На њиховом столу стоји 10 кутија нумерисаних бројевима од 1 до 10 са белим и црним куглицама унутра, при чему се у кутији нумерисаној бројем k налази k белих и $10 - k$ црних куглица. Када дођу у Кафетерију, свака од њих на случајан начин бира једну кутију, па затим из те кутије извлачи једну по једну куглицу, са враћањем. Ана се за столом задржава $50 \cdot p_2$ минута, а Тамара $20 \cdot p_3$ минута, где је p_j вероватноћа да у првих j извлачења добију j белих куглица. Одредити вероватноћу да се Ана и Тамара сретну за својим столом у Кафетерији.
2. Свака од независних случајних величина X и Y има геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу. Испитати независност случајних величина U и V , ако је $U = \min\{X, Y\}$ и $V = X - Y$.
3. Нека су X, Y, V и W независне случајне величине, свака са експоненцијалном $\mathcal{E}(1)$ расподелом. Ако је

$$Z = \min \left\{ e^{-|X-Y|}, \frac{1}{2} \cdot e^{|V-W|} \right\},$$

одредити густину расподеле случајне величине Z .

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ) - Писмени испит 1. јун 2024.

Решења задатака

1. Нека је H_k догађај да је изабрана кутија са бројем k , $k = 1, 2, \dots, 10$. Нека је A_n догађај да је у првих n извлачења добијена бела куглица. Применом формуле потпуне вероватноће добијамо

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{10} P(H_k)P(A_n|H_k) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^n = \frac{1}{10^{n+1}} \sum_{k=1}^{10} k^n.$$

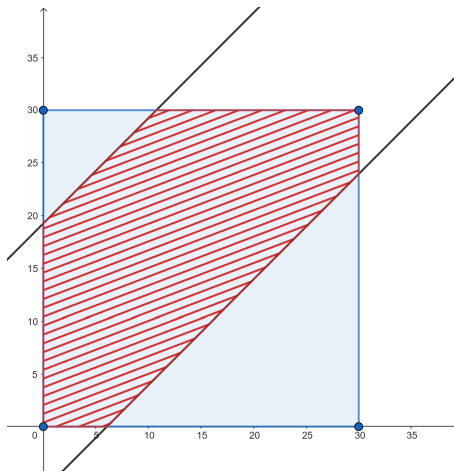
Одавде следи да је

$$p_2 = P(A_2) = \frac{1}{10^3} \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{77}{200} \approx 0.385,$$

$$p_3 = P(A_3) = \frac{1}{10^4} \sum_{k=1}^{10} k^3 = \frac{121}{400} \approx 0.3025.$$

По услову задатка Ана се задржава у Кафетерији $50 \cdot p_2 = 19.25$ минута, а Тамара $20 \cdot p_3 = 6.05$ минута. Скуп свих могућих исхода је $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$. Означимо са x тренутак Аниног доласка, а са y тренутак Тамариног доласка. Услов да се њих две сретну дат је са $y - x \leq 19.25$ и $x - y \leq 6.05$, тј, скуп повољних исхода је

$$A = \{(x, y) \in \Omega : y - x \leq 19.25, x - y \leq 6.05\}.$$



Скуп A је приказан шрафираном облашћу на слици. Тражена вероватноћа се може израчунати као количник површина области A и квадрата Ω .

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = 1 - \frac{S_1 + S_2}{S_\Omega} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(60 - 19.25)^2 + \frac{1}{2}(60 - 6.05)^2}{60^2} \approx 0.365.$$

2. За закон расподеле случајног вектора (U, V) важи да је

$$\begin{aligned} P\{U = u, V = v\} &= P\{\min\{X, Y\} = u, X - Y = v\} \\ &= P\{\min\{X, Y\} = u, X - Y = v, X \leq Y\} + P\{\min\{X, Y\} = u, X - Y = v, X > Y\} \\ &= P\{X = u, X - Y = v, X \leq Y\} + P\{Y = u, X - Y = v, X > Y\} \\ &= P\{X = u, Y = u - v, u \leq u - v\} + P\{Y = u, X = u + v, u + v > u\} \\ &= P\{X = u, Y = u - v, v \leq 0\} + P\{Y = u, X = u + v, v > 0\} \\ &= p^2(1 - p)^{2u+|v|-2}, \quad u \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Случајна величина U има закон расподеле

$$\begin{aligned} P\{\min\{X, Y\} = u\} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P\{\min\{X, Y\} = u, X - Y = m\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p^2(1-p)^{2u+|m|-2} \\ &= p^2(1-p)^{2u-2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (1-p)^{|m|} = p^2(1-p)^{2u-2} \left(2 \frac{1}{1-(1-p)} - 1 \right) \\ &= p(2-p)(1-p)^{2u-2}, \quad u \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

док случајна величина V има закон расподеле

$$\begin{aligned} P\{X - Y = v\} &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\{\min\{X, Y\} = k, X - Y = v\} = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k+|v|-2} \\ &= p^2(1-p)^{|v|} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2(k-1)} = p^2(1-p)^{|v|} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} = p^2(1-p)^{|v|} \frac{1}{1-(1-p)^2} \\ &= \frac{p(1-p)^{|v|}}{2-p}, \quad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Како је $P\{U = u, V = v\} = P\{U = u\} \cdot P\{V = v\}$ за све $u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{Z}$, то закључујемо да су U и V независне случајне величине.

3. Нека је $S = |X - Y|$. Тада је

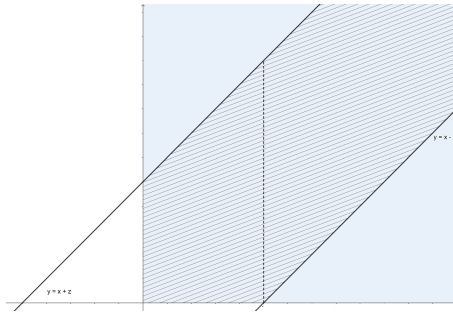
$$F_S(s) = P\{S \leq s\} = P\{|X - Y| \leq s\}.$$

Разликујемо следеће случајеве:

1° за $s < 0$ имамо да је $F_S(s) = 0$,

2° за $s \geq 0$ имамо да је

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P\{-s \leq X - Y \leq s\} = P\{X - s \leq Y \leq X + s\} \\ &= \int_0^s \int_0^{x+s} f_{X,Y}(x, y) dy dx + \int_s^\infty \int_{x-s}^{x+s} f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_0^s \int_0^{x+s} f_X(x) f_Y(y) dy dx + \int_s^\infty \int_{x-s}^{x+s} f_X(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \int_0^s \int_0^{x+s} e^{-x-y} dy dx + \int_s^\infty \int_{x-s}^{x+s} e^{-x-y} dy dx \\ &= 1 - e^{-s}. \end{aligned}$$



Дакле, $S \in \mathcal{E}(1)$. Аналогно, важи да $T \in \mathcal{E}(1)$, где је $T = |V - W|$. Даље, приметимо да случајне величине $M = e^{-S}$ и $N = e^{-T}$ имају униформну $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелу. Заиста, показаћемо да случајна величина M има дату расподелу. Имамо да је

$$\begin{aligned}
F_M(m) &= P\{M \leq m\} = P\{e^{-S} \leq m\} = P\{S > -\log m\} \\
&= 1 - P\{X \leq -\log m\} = 1 - (1 - e^{\log m}) \\
&= m, \quad m \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Како су X, Y, V, W независне случајне величине, то су и M и N такође независне. Остаје да одредимо густину расподеле случајне величине $Z = \min\left\{M, \frac{1}{2N}\right\}$.

За $z \in (0, 1)$ добијамо да је функција расподеле за Z дата са

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\left\{\min\left\{M, \frac{1}{2N}\right\} \leq z\right\} = 1 - P\left\{\min\left\{M, \frac{1}{2N}\right\} > z\right\} \\
&= 1 - P\left\{M > z, \frac{1}{2N} > z\right\} = 1 - P\left\{M > z, N \leq \frac{1}{2z}\right\} \\
&= 1 - P\{M > z\} \cdot P\left\{N \leq \frac{1}{2z}\right\}.
\end{aligned}$$

Разликујемо следеће случајеве:

1° за $0 < z \leq \frac{1}{2}$ имамо да је $F_Z(z) = 1 - (1 - z) = z$.

2° за $\frac{1}{2} < z < 1$ имамо да је $F_Z(z) = 1 - (1 - z) \cdot \frac{1}{2z} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2z}$.

Да бисмо одредили густину случајне величине, прво морамо проверити да ли је она апсолутно непрекидна. Пошто је

$$F'_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0 < z \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2z^2}, & \frac{1}{2} < z < 1, \\ 0, & z \notin (0, 1), \end{cases}$$

што је ненегативно на сваком од интервала и

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2z^2} = 1.$$

Дакле, Z је апсолутно непрекидна случајна величина и њена густина је

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0 < z \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2z^2}, & \frac{1}{2} < z < 1, \\ 0, & z \notin (0, 1), \end{cases}$$



Универзитет у Београду
Математички факултет

БЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (ЗР)

1. јун 2024. године

1. Ана и Тамара свако јутро пре одласка на факултет пију кафу у Кафетерији. Оне долазе у Кафетерију независно једна од друге у случајном тренутку између 9:00 и 10:00 часова. На њиховом столу стоји 10 кутија нумерисаних бројевима од 1 до 10 са белим и црним куглицама унутра, при чему се у кутији нумерисаној бројем k налази k белих и $10 - k$ црних куглица. Када дођу у Кафетерију, свака од њих на случајан начин бира једну кутију, па затим из те кутије извлачи једну по једну куглицу, са враћањем. Ана се за столом задржава $50 \cdot p_2$ минута, а Тамара $20 \cdot p_3$ минута, где је p_j вероватноћа да у првих j извлачења добију j белих куглица. Одредити вероватноћу да се Ана и Тамара сретну за својим столом у Кафетерији.
2. Свака од независних случајних величина X и Y има геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу. Испитати независност случајних величина U и V , ако је $U = \min\{X, Y\}$ и $V = X - Y$.
3. На кружници полупречника r на случајан начин се бира тачка X . Број α се случајно бира из интервала $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, а затим се кроз тачку X повлачи права која сече кружницу други пут у тачки Y и заклапа позитивно оријентисани угао $\angle YXX'$ мере α , где је X' дијаметрално супротна тачка тачки X . Ако је Z растојање између тачака Y и X' , одредити расподелу и математичко очекивање случајне величине Z .
4. Нека су X, Y, V и W независне случајне величине, свака са експоненцијалном $\mathcal{E}(1)$ расподелом.
 - (а) Ако је $S = |X - Y|$ и $T = |V - W|$, одредити расподелу случајних величина S и T .
 - (б) Ако је

$$Z = \min \left\{ e^{-S}, \frac{1}{2e^{-T}} \right\},$$

одредити густину расподеле случајне величине Z .

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р) - Писмени испит 1. јун 2024.

Решења задатака

1. Нека је H_k догађај да је изабрана кутија са бројем k , $k = 1, 2, \dots, 10$. Нека је A_n догађај да је у првих n извлачења добијена бела куглица. Применом формуле потпуне вероватноће добијамо

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{10} P(H_k)P(A_n|H_k) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^n = \frac{1}{10^{n+1}} \sum_{k=1}^{10} k^n.$$

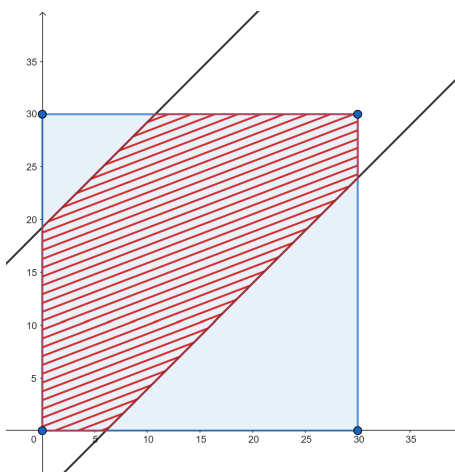
Одавде следи да је

$$p_2 = P(A_2) = \frac{1}{10^3} \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{77}{200} \approx 0.385,$$

$$p_3 = P(A_3) = \frac{1}{10^4} \sum_{k=1}^{10} k^3 = \frac{121}{400} \approx 0.3025.$$

По услову задатка Ана се задржава у Кафетерији $50 \cdot p_2 = 19.25$ минута, а Тамара $20 \cdot p_3 = 6.05$ минута. Скуп свих могућих исхода је $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$. Означимо са x тренутак Аниног доласка, а са y тренутак Тамариног доласка. Услов да се њих две сретну дат је са $y - x \leq 19.25$ и $x - y \leq 6.05$, тј, скуп повољних исхода је

$$A = \{(x, y) \in \Omega : y - x \leq 19.25, x - y \leq 6.05\}.$$



Скуп A је приказан шрафираном облашћу на слици. Тражена вероватноћа се може израчунати као количник површина области A и квадрата Ω .

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = 1 - \frac{S_1 + S_2}{S_\Omega} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(60 - 19.25)^2 + \frac{1}{2}(60 - 6.05)^2}{60^2} \approx 0.365.$$

2. За закон расподеле случајног вектора (U, V) важи да је

$$\begin{aligned} P\{U = u, V = v\} &= P\{\min\{X, Y\} = u, X - Y = v\} \\ &= P\{\min\{X, Y\} = u, X - Y = v, X \leq Y\} + P\{\min\{X, Y\} = u, X - Y = v, X > Y\} \\ &= P\{X = u, X - Y = v, X \leq Y\} + P\{Y = u, X - Y = v, X > Y\} \\ &= P\{X = u, Y = u - v, u \leq u - v\} + P\{Y = u, X = u + v, u + v > u\} \\ &= P\{X = u, Y = u - v, v \leq 0\} + P\{Y = u, X = u + v, v > 0\} \\ &= p^2(1 - p)^{2u+|v|-2}, \quad u \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Случајна величина U има закон расподеле

$$\begin{aligned} P\{\min\{X, Y\} = u\} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P\{\min\{X, Y\} = u, X - Y = m\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p^2(1-p)^{2u+|m|-2} \\ &= p^2(1-p)^{2u-2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (1-p)^{|m|} = p^2(1-p)^{2u-2} \left(2 \frac{1}{1-(1-p)} - 1 \right) \\ &= p(2-p)(1-p)^{2u-2}, \quad u \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

док случајна величина V има закон расподеле

$$\begin{aligned} P\{X - Y = v\} &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\{\min\{X, Y\} = k, X - Y = v\} = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k+|v|-2} \\ &= p^2(1-p)^{|v|} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2(k-1)} = p^2(1-p)^{|v|} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} = p^2(1-p)^{|v|} \frac{1}{1-(1-p)^2} \\ &= \frac{p(1-p)^{|v|}}{2-p}, \quad v \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Како је $P\{U = u, V = v\} = P\{U = u\} \cdot P\{V = v\}$ за све $u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{Z}$, то закључујемо да су U и V независне случајне величине.

3. Угао α можемо сматрати случајном величином са униформном $\mathcal{U}(0, \frac{\pi}{4})$ расподелом, јер посматрамо само позитивно оријентисан угао. Тада је $\frac{Z}{2r} = \sin \alpha$. Функција расподеле случајне величине Z је:

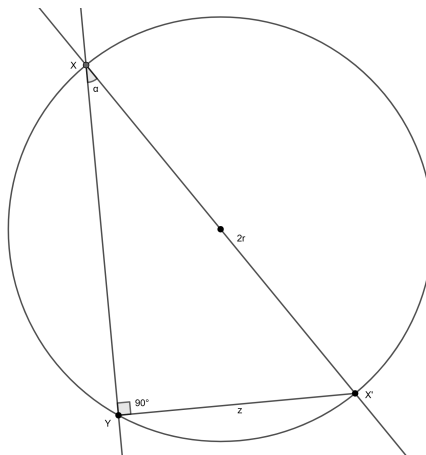
$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{2r \sin \alpha \leq z\} = P\left\{\sin \alpha \leq \frac{z}{2r}\right\} \\ &= P\left\{\alpha \leq \arcsin \frac{z}{2r}\right\} = F_\alpha\left(\arcsin \frac{z}{2r}\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{z}{2r}, \quad 0 < z < \sqrt{2}r, \end{aligned}$$

па је густина за Z :

$$g_Z(z) = \frac{2}{r\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{2r}\right)^2}}, \quad 0 < z < \sqrt{2}r.$$

Очекивана вредност је:

$$EZ = \int_0^{\sqrt{2}r} z g_Z(z) dz = \frac{2}{r\pi} \int_0^{\sqrt{2}r} \frac{z}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{2r}\right)^2}} dz = \frac{1}{\pi} \int_{2r^2}^{4r^2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{4r}{\pi} (2 - \sqrt{2}).$$



4. Нека је $S = |X - Y|$. Тада је

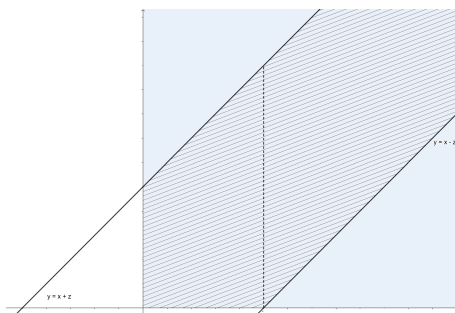
$$F_S(s) = P\{S \leq s\} = P\{|X - Y| \leq s\}.$$

Разликујемо следеће случајеве:

1° за $s < 0$ имамо да је $F_S(s) = 0$,

2° за $s \geq 0$ имамо да је

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P\{-s \leq X - Y \leq s\} = P\{X - s \leq Y \leq X + s\} \\ &= \int_0^s \int_0^{x+s} f_{X,Y}(x,y) dy dx + \int_s^\infty \int_{x-s}^{x+s} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int_0^s \int_0^{x+s} f_X(x) f_Y(y) dy dx + \int_s^\infty \int_{x-s}^{x+s} f_X(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \int_0^s \int_0^{x+s} e^{-x-y} dy dx + \int_s^\infty \int_{x-s}^{x+s} e^{-x-y} dy dx \\ &= 1 - e^{-s}. \end{aligned}$$



Дакле, $S \in \mathcal{E}(1)$. Аналогно, важи да $T \in \mathcal{E}(1)$, где је $T = |V - W|$. Даље, приметимо да случајне величине $M = e^{-S}$ и $N = e^{-T}$ имају униформну $\mathcal{U}(0,1)$ расподелу. Заиста, покажаћемо да случајна величина M има дату расподелу. Имамо да је

$$\begin{aligned} F_M(m) &= P\{M \leq m\} = P\{e^{-S} \leq m\} = P\{S > -\log m\} \\ &= 1 - P\{X \leq -\log m\} = 1 - (1 - e^{\log m}) \\ &= m, \quad m \in (0,1). \end{aligned}$$

Како су X, Y, V, W независне случајне величине, то су и M и N такође независне. Остаје да одредимо густину расподеле случајне величине $Z = \min\left\{M, \frac{1}{2N}\right\}$.

За $z \in (0,1)$ добијамо да је функција расподеле за Z дата са

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\left\{\min\left\{M, \frac{1}{2N}\right\} \leq z\right\} = 1 - P\left\{\min\left\{M, \frac{1}{2N}\right\} > z\right\} \\ &= 1 - P\left\{M > z, \frac{1}{2N} > z\right\} = 1 - P\left\{M > z, N \leq \frac{1}{2z}\right\} \\ &= 1 - P\{M > z\} \cdot P\left\{N \leq \frac{1}{2z}\right\}. \end{aligned}$$

Разликујемо следеће случајеве:

1° за $0 < z \leq \frac{1}{2}$ имамо да је $F_Z(z) = 1 - (1 - z) = z$.

2° за $\frac{1}{2} < z < 1$ имамо да је $F_Z(z) = 1 - (1 - z) \cdot \frac{1}{2z} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2z}$.

Да бисмо одредили густину случајне величине, прво морамо проверити да ли је она апсолутно непрекидна. Пошто је

$$F'_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0 < z \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2z^2}, & \frac{1}{2} < z < 1, \\ 0, & z \notin (0, 1), \end{cases}$$

што је ненегативно на сваком од интервала и

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2z^2} = 1.$$

Дакле, Z је апсолутно непрекидна случајна величина и њена густина је

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0 < z \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2z^2}, & \frac{1}{2} < z < 1, \\ 0, & z \notin (0, 1), \end{cases}$$