



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ)

СЕПТЕМБАР 1 - 8. октобар 2025. године

1. У колекцији постоји n различитих сличица. Отвара се укупно m кесица, при чему свака кесица садржи тачно једну сличицу из колекције. Одредити вероватноћу да је колекција комплетирана након m отворених кесица.
2. У просторији се налази n особа, где је $n = 4$ са вероватноћом $\frac{1}{8}$, $n = 8$ са вероватноћом $\frac{1}{4}$, $n = 12$ са вероватноћом $\frac{1}{2}$ и $n = 16$ са вероватноћом $\frac{1}{8}$. Одредити коефицијент корелације случајних величина које представљају број особа у соби и индикатор да су у соби бар две особе рођене истог месеца.
3. Разматра се електрично коло са три сијалице. Коло престаје да ради у тренутку када престане да ради сијалица T_1 или када престану да раде обе сијалице T_2 и T_3 . Времена рада сијалица T_1 , T_2 и T_3 су независне случајне величине од којих свака има експоненцијалну $\mathcal{E}(2)$ расподелу. Одредити расподелу времена рада целог кола.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ) - Писмени испит 8. октобар 2025.

Решења задатака

1. Нека је E догађај да је колекција сличица комплетирана, тј. да је свака од n сличица добијена бар једном, а E_k догађај да се сличица k није појавила ниједном у m отварања, где је $k = 1, 2, \dots, n$. Тада је

$$P(E) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right),$$

при чему је на основу формуле укључења и искључења

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(E_i E_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(E_i E_j E_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(E_1 E_2 \dots E_n).$$

Како је

$$P(E_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, P(E_i E_j) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m, \dots, P(E_1 E_2 \dots E_k) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^m, \dots$$

то следи да је тражена вероватноћа

$$P(E) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^m = \frac{1}{n^m} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

2. Нека случајна величина N представља број особа у просторији. За закон расподеле случајне величине N важи да је

$$P\{N = 4\} = \frac{1}{8}, \quad P\{N = 8\} = \frac{1}{4}, \quad P\{N = 12\} = \frac{1}{2}, \quad P\{N = 16\} = \frac{1}{8},$$

одакле следи

$$E(N) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{8} = \frac{21}{2} = 10.5, \quad E(N^2) = 4^2 \cdot \frac{1}{8} + 8^2 \cdot \frac{1}{4} + 12^2 \cdot \frac{1}{2} + 16^2 \cdot \frac{1}{8} = 122,$$

па је

$$D(N) = E(N^2) - (E(N))^2 = 11.75.$$

Нека је I случајна величина која представља индикатор да постоје бар две особе рођене истог месеца. Тада важи

$$P(I = 0 \mid N = n) = \frac{12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (12 - n + 1)}{12^n}, \quad n \in \{4, 8, 12\},$$

а за $n = 16$ имамо $P\{I = 1 \mid N = n\} = 1$. Конкретно:

$$P\{I = 1 \mid N = 4\} = 1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{12^4} \approx 0.4271,$$

$$P\{I = 1 \mid N = 8\} = 1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 5}{12^8} \approx 0.9536,$$

$$P\{I = 1 \mid N = 12\} = 1 - \frac{12!}{12^{12}} \approx 0.999946,$$

$$P\{I = 1 \mid N = 16\} = 1.$$

Сада је

$$E(I) = \sum_{n \in \{4, 8, 12, 16\}} P\{I = 1 \mid N = n\} P\{N = n\} \approx 0.9168.$$

За случајну величину NI важи да је

$$NI = \begin{cases} 0, & I = 0, \\ N, & I = 1, \end{cases}$$

па је одговарајући закон расподеле

$$P\{NI = 0\} = P\{I = 0\} = \sum_{n \in \{4, 8, 12, 16\}} P\{N = n\}P\{I = 0 \mid N = n\},$$

$$P\{NI = k\} = P\{N = k, I = 1\} = P\{N = k\}P\{I = 1 \mid N = k\}, \quad k \in \{4, 8, 12, 16\}.$$

На основу претходног добијамо да је

$$E(NI) = \sum_{n \in \{4, 8, 12, 16\}} nP\{I = 1 \mid N = n\}P\{N = n\} \approx 10.1204$$

па је коваријанса

$$\text{Cov}(N, I) = E(NI) - E(N)E(I) \approx 0.4945.$$

Како је I индикатор, то је $D(I) = E(I) - (E(I))^2 \approx 0.0763$, па следи да је коефицијент корелације

$$\rho_{N, I} = \frac{\text{Cov}(N, I)}{\sqrt{D(N)}\sqrt{D(I)}} \approx 0.5221.$$

3. Времена рада сијалица T_1 , T_2 и T_3 су независне случајне величине од којих свака има експоненцијалну $\mathcal{E}(2)$ расподелу. Коло престаје да ради у моменту

$$X = \min\{T_1, \max(T_2, T_3)\}.$$

За $x \geq 0$ важи да је

$$P\{X > x\} = P\{T_1 > x\} P\{\max(T_2, T_3) > x\}.$$

Како је

$$P\{T_1 > x\} = e^{-2x}, \quad P\{\max(T_2, T_3) > x\} = 1 - (1 - e^{-2x})^2 = 2e^{-2x} - e^{-4x},$$

следи

$$P\{X > x\} = e^{-2x}(2e^{-2x} - e^{-4x}) = 2e^{-4x} - e^{-6x}, \quad x \geq 0.$$

Дакле, функција расподеле случајне величине X је

$$F_X(x) = 1 - P\{X > x\} = 1 - (2e^{-4x} - e^{-6x}), \quad x \geq 0.$$