



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЈ)

ЈАНУАР 1 - 11. август 2025. године

1. Андреј је у џепу имао 6 плавих и 2 црвена кликера, али је 1 кликер изгубио. Два пута, са враћањем, вади по један кликер из џепа и констатује боју сваког од извучених кликера. Ако су оба извучена кликера исте боје, израчунати вероватноћу да је изгубљени кликер плаве боје.
2. На детектору честица проучавају се времена живота две радиоактивне честице до распада. Време живота α честице до њеног распада има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, а време живота β честице до њеног распада има експоненцијалну $\mathcal{E}(\mu)$ расподелу. Ако су времена живота до распада ове две честице међусобно независна, доказати да је очекивано време између распада прве и распада друге честице бар два пута веће од очекиваног времена до првог распада.
3. Александар и Милош на случајан начин, независно један од другог, бирају по један број из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$. Нека случајна величина X представља број који је изабрао Александар, а случајна величина Z збир бројева које су изабрали Александар и Милош. Одредити условну расподелу случајне величине X при услову $Z = z$.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ) - Писмени испит 11. август 2025.

Решења задатака

1. Означимо са Z догађај да је изгубљени кликер плаве боје. Догађаји Z и $\bar{Z}$ очигледно чине потпун систем догађаја и вероватноће ових догађаја су

$$P(Z) = \frac{6}{6+2} = \frac{3}{4}, \quad P(\bar{Z}) = 1 - P(Z) = \frac{1}{4}.$$

Дефинишимо следеће догађаје:

- A догађај да су оба извучена кликера плаве боје,
- B догађај да су оба извучена кликера црвене боје,
- C догађај да су оба извучена кликера исте боје.

Јасно, важи да су догађаји A и B дисјунктни и да је $C = A \sqcup B$. Како је

$$P(C|Z) = P(A|Z) + P(B|Z) = \left(\frac{5}{5+2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5+2}\right)^2 = \frac{29}{49},$$

$$P(C|\bar{Z}) = P(A|\bar{Z}) + P(B|\bar{Z}) = \left(\frac{6}{6+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{6+1}\right)^2 = \frac{37}{49},$$

користећи формулу потпуне вероватноће добијамо

$$P(C) = P(Z)P(C|Z) + P(\bar{Z})P(C|\bar{Z}) = \frac{3}{4} \frac{29}{49} + \frac{1}{4} \frac{37}{49} = \frac{31}{49}.$$

Користећи Бајесову формулу добијамо да је тражена вероватноћа

$$P(Z|C) = \frac{P(Z)P(C|Z)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} \frac{29}{49}}{\frac{31}{49}} = \frac{87}{124} \approx 0.7016.$$

2. Нека случајна величина X представља време живота α честице, а Y време живота β честице. Тада је према услову задатка $X \in \mathcal{E}(\lambda)$ и $Y \in \mathcal{E}(\mu)$. Ако је Z време до првог распада, а W време између распада прве и распада друге честице, тада је $Z = \min\{X, Y\}$ и $W = |X - Y| = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\}$. Одредимо функцију расподеле случајне величине Z . Имамо да је

$$\begin{aligned} P\{Z > z\} &= P\{\min\{X, Y\} > z\} = P\{X > z, Y > z\} = P\{X > z\}P\{Y > z\} \\ &= e^{-\lambda z} e^{-\mu z} = e^{-(\lambda+\mu)z}, \end{aligned}$$

тј. $F_z(z) = 1 - P\{Z > z\} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$, за $z \in (0, 1)$. Дакле, $Z \in \mathcal{E}(\lambda+\mu)$, па је $EZ = \frac{1}{\lambda+\mu}$. Даље, како су X и Y ненегативне случајне величине, то важи $\min\{X, Y\} + \max\{X, Y\} = X + Y$. Са друге стране, математичко очекивање је линеарни оператор па је очекивање случајне величине W једнако

$$\begin{aligned} EW &= E(\max\{X, Y\}) - E(\min\{X, Y\}) \\ &= EX + EY - 2E(\min\{X, Y\}) \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{2}{\lambda + \mu} \\ &= \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda\mu(\lambda + \mu)}. \end{aligned}$$

Заиста, важи да је $EW \geq 2 \cdot EZ$ јер је

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda\mu(\lambda + \mu)} \geq \frac{2}{\lambda + \mu} \iff (\lambda - \mu)^2 \geq 0,$$

што је очигледно тачно.

Напомена 1: Математичко очекивање случајне величине $W = |X - Y|$ одредићемо директно, по дефиницији. Важи да је

$$E|X - Y| = \iint_{\mathbb{R}_+^2} |x - y| \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dx dy = I_1 + I_2,$$

где су

$$I_1 = \iint_{x>y} (x - y) \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dx dy, \quad I_2 = \iint_{y>x} (y - x) \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dx dy.$$

Први случај ($x > y$):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \mu e^{-\mu y} \int_{x=y}^\infty (x - y) \lambda e^{-\lambda x} dx dy \\ &\stackrel{t=x-y}{=} \int_0^\infty \mu e^{-\mu y} e^{-\lambda y} \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt dy \\ &= \int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)y} \frac{1}{\lambda} dy = \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}. \end{aligned}$$

Други случај ($y > x$) симетрично даје

$$I_2 = \frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)}.$$

Зато је

$$E|X - Y| = I_1 + I_2 = \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)} + \frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{2}{\lambda+\mu}.$$

Напомена 2: За $w \geq 0$ имамо да је

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(|X - Y| \leq w) = \iint_{\{(x,y): |x-y| \leq w, x \geq 0, y \geq 0\}} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy dx \\ &= \int_0^w \lambda e^{-\lambda x} \int_0^{x+w} \mu e^{-\mu y} dy dx + \int_w^\infty \lambda e^{-\lambda x} \int_{x-w}^{x+w} \mu e^{-\mu y} dy dx. \end{aligned}$$

Рачунамо унутрашње интеграле:

$$\int_0^{x+w} \mu e^{-\mu y} dy = 1 - e^{-\mu(x+w)}, \quad \int_{x-w}^{x+w} \mu e^{-\mu y} dy = e^{-\mu(x-w)} - e^{-\mu(x+w)}.$$

Коначно, функција расподеле случајне величине W је

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_0^w \lambda e^{-\lambda x} [1 - e^{-\mu(x+w)}] dx + \int_w^\infty \lambda e^{-\lambda x} [e^{-\mu(x-w)} - e^{-\mu(x+w)}] dx \\ &= (1 - e^{-\lambda w}) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\mu w} (1 - e^{-(\lambda+\mu)w}) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} (e^{-\lambda w} - e^{-(\lambda+2\mu)w}) \\ &= 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda w} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\mu w}, \quad w \geq 0. \end{aligned}$$

Диференцирањем по $w \geq 0$, следи да за густину расподеле случајне величине W важи да је

$$f_W(w) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} (e^{-\lambda w} + e^{-\mu w}), \quad w \geq 0.$$

3. Нека случајна величина X представља број који је изабрао Александар, а случајна величина Y број који је изабрао Милош. Случајне величине X и Y су независне и имају исти закон расподеле за који важи

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

одакле следи да је закон расподеле случајног вектора (X, Y) дат са

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\} = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 \\ 0, & (i, j) \notin \{1, 2, \dots, n\}^2. \end{cases}$$

Одредимо сада закон расподеле случајне величине $Z = X + Y$. Скуп вредности случајне величине Z је $\{2, 3, \dots, 2n\}$, а одговарајуће вероватноће су

$$P\{Z = k\} = P\{X + Y = k\} = \sum_{i=1}^{k-1} P\{X = i, Y = k - i\} = \sum_{i=1}^{k-1} P\{X = i\}P\{Y = k - i\}$$

(а) за $k \in \{2, 3, \dots, n+1\}$ (у овом случају је $i, k - i \in \{1, 2, \dots, n\}$):

$$P\{Z = k\} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2},$$

(б) за $k \in \{n+2, n+3, \dots, 2n\}$ (у овом случају није увек задовољено $i, k - i \in \{1, 2, \dots, n\}$):

$$P\{Z = k\} = \sum_{i=1}^{k-n-1} 0 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

Према томе, за закон расподеле случајне величине Z важи да је

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ \frac{1}{n^2} & \frac{2}{n^2} & \dots & \frac{n-1}{n^2} & \frac{n}{n^2} & \frac{n-1}{n^2} & \frac{n-2}{n^2} & \dots & \frac{2}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

Користећи закон расподеле случајне величине Z налазимо условни закон расподеле случајне величине X при услову $Z = k$, за $k \in \{2, 3, \dots, 2n\}$. Одговарајуће вероватноће су

(а) за $k \in \{2, 3, \dots, n+1\}$ имамо

$$P\{X = i|Z = k\} = \frac{P\{X = i\}P\{Y = k - i\}}{\frac{k-1}{n^2}}$$

(а1) за $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ је

$$P\{X = i|Z = k\} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{k-1}{n^2}} = \frac{1}{k-1},$$

(а2) за $i \in \{k, k+1, \dots, n\}$ је

$$P\{X = i|Z = k\} = \frac{0}{\frac{k-1}{n^2}} = 0,$$

(б) за $k \in \{n+2, n+3, \dots, 2n\}$ имамо

$$P\{X = i|Z = k\} = \frac{P\{X = i\}P\{Y = k - i\}}{\frac{2n-k+1}{n^2}}$$

(б1) за $i \in \{1, 2, \dots, k-n-1\}$ је

$$P\{X = i|Z = k\} = \frac{0}{\frac{2n-k+1}{n^2}} = 0,$$

(б2) за $i \in \{k-n, k-n-1, \dots, k-1\}$ је

$$P\{X = i|Z = k\} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{2n-k+1}{n^2}} = \frac{1}{2n-k+1}.$$