



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЈ)

25. септембар 2025. године

1. Два брода случајно и независно један од другог пристају у пристаниште између 10:00 и 19:00 часова. Ако је познато да је разлика у временима пристајања мања од 3 сата, одредити вероватноћу да је бар један брод пристао у периоду између 13:00 и 16:00 часова.
2. Дечак је отворио кесицу у којој се налази N чоколадних бомбона, где је N случајна величина која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. Свака од бомбона је или од беле или од млечне чоколаде, при чему је за сваку бомбону, независно од осталих, вероватноћа да буде од беле чоколаде једнака p . Ако X представља број бомбона од беле чоколаде у кесици, а Y број бомбона од млечне чоколаде, израчунати коваријацију случајних величина X и Y .
3. За густину расподеле случајне величине X важи да је $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Ако је

$$Y = \begin{cases} X + 2, & X \leq -2, \\ |X| - 2, & -2 < X \leq 3, \\ 1, & 3 < X, \end{cases}$$

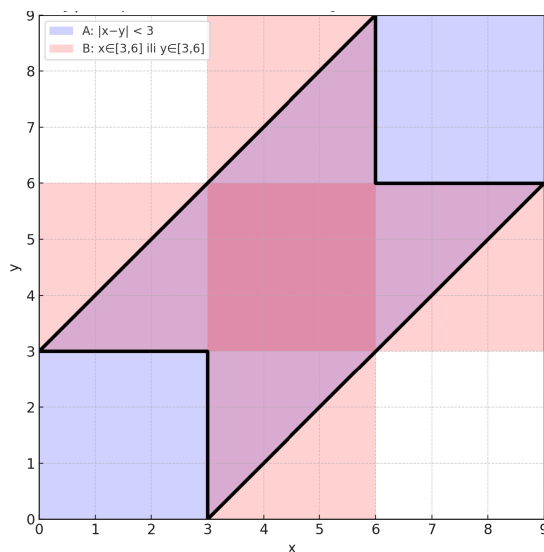
одредити расподелу случајне величине Y .

Решења задатака

1. Нека је A догађај да је разлика у временима пристајања мања од 3 сата, а B догађај да је бар један брод пристао у пристаниште између 13:00 и 16:00 часова. Скуп свих могућих исхода је $\Omega = [0, 9] \times [0, 9]$ и важи да је

$$A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq 3\},$$

$$B = \{(x, y) \in \Omega : 3 \leq x \leq 6 \vee 3 \leq y \leq 6\}.$$



Сада је

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{9^2 - 2 \cdot \frac{6^2}{2}}{9^2} = \frac{45}{9^2},$$

$$P(AB) = \frac{m(AB)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{6^2}{2} + 2 \cdot \frac{3^2}{2}}{9^2} = \frac{27}{9^2}.$$

Тражена вероватноћа је

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{27}{45} = \frac{3}{5}.$$

2. Нека је X број белих, а Y број млечних бомбона у кесици. Тада случајна величина X при услову $N = n$ има биномну $\mathcal{B}(n, p)$ расподелу, а случајна величина Y при услову $N = n$ има биномну $\mathcal{B}(n, 1 - p)$ расподелу, где је $N \in \mathcal{P}(\lambda)$. Следи да је

$$\begin{aligned} P\{X = x\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X = x | N = n\} P\{N = n\} = \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= p^x e^{-\lambda} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} (1-p)^{n-x} \frac{\lambda^n}{n!} = p^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Одавде важи да је $X \in \mathcal{P}(\lambda p)$. Аналогно добијамо да је $Y \in \mathcal{P}(\lambda(1-p))$. Даље, имамо да је

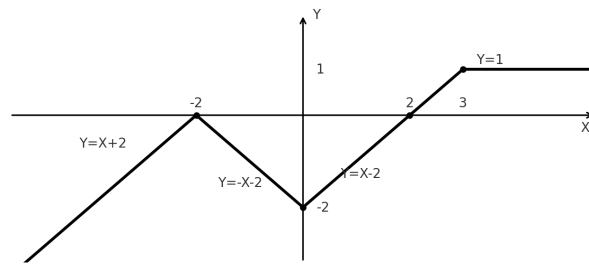
$$\begin{aligned}
P\{X = x, Y = y\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X = x, Y = y | N = n\} P\{N = n\} \\
&= P\{X = x, Y = y | N = x + y\} P\{N = x + y\} \\
&= \binom{x+y}{x} p^x (1-p)^y \frac{\lambda^{x+y} e^{-\lambda}}{(x+y)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!} \frac{(\lambda(1-p))^y e^{-\lambda(1-p)}}{y!} \\
&= P\{X = x\} P\{Y = y\}, \quad \forall x, y \in \{0, 1, 2, \dots\}.
\end{aligned}$$

Из претходног следи да су случајне величине X и Y независне па је $E(XY) = EX \cdot EY$, односно $\text{cov}(X, Y) = 0$.

3. Имамо да је

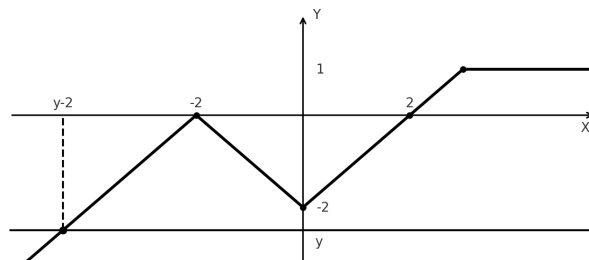
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

С обзиром на дефиницију случајне величине Y и тачку $x = 0$ у којој се грана густина случајне величине X , добијамо следеће случајеве по y :



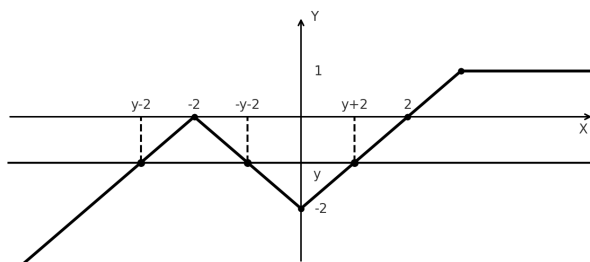
(а) за $y \leq -2$ (при томе је $y - 2 \leq 0$):

$$F_Y(y) = P\{X < y - 2\} = \int_{-\infty}^{y-2} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{y-2} \frac{1}{2} e^x dx = \frac{1}{2} e^{y-2},$$



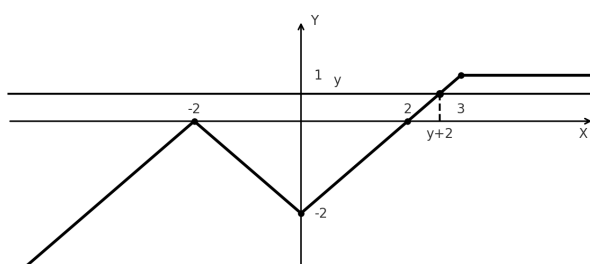
(б) за $-2 < y \leq 0$ (при томе је $y - 2 \leq 0 \wedge -y - 2 < 0 \wedge y + 2 > 0$):

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{\{X < y - 2\} \cup \{-y - 2 < X < y + 2\}\} \\
&= P\{X < y - 2\} + P\{-y - 2 < X < y + 2\} \\
&= \int_{-\infty}^{y-2} \frac{1}{2} e^x dx + \int_{-y-2}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^{y+2} e^{-x} dx = 1 - e^{-2} \left(e^{-y} - \frac{1}{2} e^y \right),
\end{aligned}$$



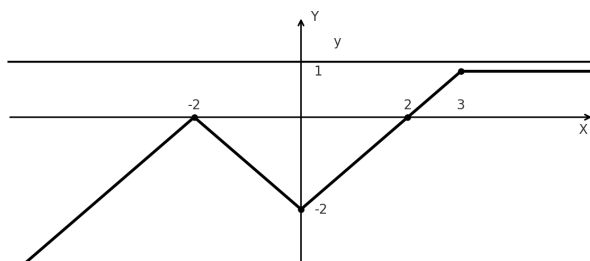
(в) за $0 < y \leq 1$ (при томе је $y + 2 > 0$):

$$F_Y(y) = P\{X < y + 2\} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^{y+2} \frac{1}{2} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{2e^2} e^{-y},$$



(г) за $1 < y$:

$$F_Y(y) = P\{X \in \mathbb{R}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$



Дакле, функција расподеле случајне величине Y је

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{y-2}, & y \leq -2, \\ 1 - e^{-2} \left(e^{-y} - \frac{1}{2} e^y \right), & -2 < y \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2e^2} e^{-y}, & 0 < y \leq 1, \\ 1, & 1 < y. \end{cases}$$