



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4МНЛ)

27. август 2024. године

1. Како би прималац исправно детектовао бинарни сигнал 0 или 1 који му пошиљалац жели послати, тај сигнал се шаље n пута, где је n непаран природан број већи од 30, информационим каналом који садржи два чвора, кодер и декодер. Услед шума који се појављује у информационом каналу, вероватноћа пријема сигнала који је послат кодеру је 0.80, а декодеру 0.75. Прималац региструје онај сигнал који се више пута појави на крају канала. Одредити колико треба да је n , па да вероватноћа да прималац исправно детектује сигнал који му пошиљалац жели послати буде бар 0.99.
2. Нека случајна величина X има закон расподеле

$$P\{X = x\} = \frac{a}{x+a} \binom{n}{x} \frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{n+a+b-1}{x+a}}, \quad x = 0, 1, \dots, n,$$

где су a , b и n природни бројеви. Одредити математичко очекивање случајне величине X .

3. Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$ расподелу, а случајна величина Y експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\mu})$ расподелу. Ако су X и Y независне и ако је

$$Z = \min\{X, Y\} \text{ и } W = I\{Z = X\},$$

испитати независност случајних величина Z и W .

Решења задатака

1. Нека је I_i случајна променљива која описује да је прималац правилно детектовао сигнал у i -том понављању, $i = 1, 2, \dots, n$. Вероватноћа да је сигнал правилно примљен на излазу једнака је $P\{I_i = 1\} = 0.8 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.65$. Случајна променљива $S_n = \sum_{i=1}^n I_i$ представља број сигнала које је прималац правилно регистровао. Јасно, S_n има биномну $\mathcal{B}(n, 0.65)$ расподелу.

Одредимо $n \in \mathbb{N}$ из услова да је $P\{S_n \geq \frac{n+1}{2}\} = 0.99$. Пошто је $n > 30$, $np > 19.5$ и $n(1-p) > 10.5$, можемо извршити апроксимацију нормалном $\mathcal{N}(0.65n, 0.2275n)$ расподелом, па је

$$P\left\{S_n \geq \frac{n+1}{2}\right\} = 1 - P\left\{S_n < \frac{n+1}{2}\right\} = 0.99$$

$$\begin{aligned} 0.01 &= P\left\{0 \leq S_n < \frac{n+1}{2}\right\} \approx P\left\{-0.5 \leq S_n < \frac{n+1}{2} - 0.5\right\} \\ &= P\left\{\frac{-0.5 - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}} \leq \frac{S_n - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}} < \frac{\frac{n}{2} - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{n}{2} - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5 - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}}\right) \end{aligned}$$

Пошто је $n > 30$, то је

$$\frac{-0.5 - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}} \leq -7.6556,$$

па је

$$\Phi\left(\frac{-0.5 - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}}\right) \approx 0.$$

Према томе,

$$\frac{\frac{n}{2} - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}} = \Phi^{-1}(0.01) = -2.33,$$

те је

$$0.15n - 2.33\sqrt{0.2275n} = 0,$$

одакле, решавањем квадратне једначине и елиминисањем решења $n = 0$ добијамо да је $\sqrt{n} = 7.4089$, па је $n = 54.8922$. Дакле, пошиљалац треба послати сваки сигнал барем $n = 55$ пута (а прималац треба узети онај сигнал који се јавио барем у 28 случаја).

2. Користећи познат идентитет $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$, имамо да је

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{x=0}^n x \frac{a}{x+a} \binom{n}{x} \frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{n+a+b-1}{x+a}} = \sum_{x=1}^n n \frac{a}{(x-1) + (a+1)} \binom{n-1}{x-1} \frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{(n-1)+(a+1)+b-1}{(x-1)+(a+1)}} \\ &= \frac{\frac{na}{a+1} \binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+1+b-1}{a+1}} \sum_{x=1}^n \frac{a+1}{(x-1) + (a+1)} \binom{n-1}{x-1} \frac{\binom{a+1+b-1}{a+1}}{\binom{(n-1)+(a+1)+b-1}{(x-1)+(a+1)}} \\ &= \frac{na}{a+b} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a+1}{j + (a+1)} \binom{n-1}{j} \frac{\binom{a+1+b-1}{a+1}}{\binom{(n-1)+(a+1)+b-1}{j+(a+1)}} \\ &= \frac{na}{a+b}, \end{aligned}$$

јер је последња сума једнака 1 као сума вероватноћа из закона расподеле случајне величине X за скуп параметара $(n-1, a+1, b)$.

3. Имамо да је

$$\begin{aligned}
 P\{Z \leq z, W = 0\} &= P\{\min\{X, Y\} \leq z, Y \leq X\} = P\{Y \leq z, Y \leq X\} \\
 &= \int_0^z \int_y^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dx dy \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(1 - e^{-z\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)}\right).
 \end{aligned}$$

Слично, добијамо да је

$$\begin{aligned}
 P\{Z \leq z, W = 1\} &= P\{\min\{X, Y\} \leq z, X \leq Y\} = P\{X \leq z, X \leq Y\} \\
 &= \int_0^z \int_x^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dy dx \\
 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(1 - e^{-z\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)}\right).
 \end{aligned}$$

Са друге стране, имамо да је

$$\begin{aligned}
 P\{W = 0\} &= P\{Y \leq X\} = \int_0^\infty \int_y^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dx dy = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \\
 P\{W = 1\} &= 1 - P\{W = 0\} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.
 \end{aligned}$$

Одавде добијамо да је

$$P\{Z \leq z\} = P\{Z \leq z, W = 0\} + P\{Z \leq z, W = 1\} = 1 - e^{-z\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)}.$$

Закључујемо да вреди да је

$$P\{Z \leq z, W = i\} = P\{Z \leq z\}P\{W = i\},$$

за $i = 0, 1$, $z > 0$, па следи да су случајне величине Z и W независне.



Универзитет у Београду
Математички факултет

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (ЗР)

27. август 2024. године

- Из интервала $(0, 3)$ бирају се два броја.
 - Одредити вероватноћу да је збир изабраних бројева мањи од 3 и максимум мањи од 2.
 - Ако је максимум изабраних бројева мањи од 2, одредити вероватноћу да је минимум изабраних бројева већи од 1.
- Како би прималац исправно детектовао бинарни сигнал 0 или 1 који му пошиљалац жели послати, тај сигнал се шаље n пута, где је n непаран природан број већи од 30, информационим каналом који садржи два чвора, кодер и декодер. Услед шума који се појављује у информационом каналу, вероватноћа пријема сигнала који је послат кодеру је 0.80, а декодеру 0.75. Прималац региструје онај сигнал који се више пута појави на крају канала. Одредити колико треба да је n , па да вероватноћа да прималац исправно детектује сигнал који му пошиљалац жели послати буде бар 0.99.
- Нека случајна величина X има закон расподеле

$$P\{X = x\} = \frac{a}{x+a} \binom{n}{x} \frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{n+a+b-1}{x+a}}, \quad x = 0, 1, \dots, n,$$

где су a , b и n природни бројеви. Одредити математичко очекивање случајне величине X .

- Случајна величина X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$ расподелу, а случајна величина Y експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\mu})$ расподелу. Ако су X и Y независне и ако је

$$Z = \min\{X, Y\} \text{ и } W = I\{Z = X\},$$

испитати независност случајних величина Z и W .

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (3Р) - Писмени испит 27. август 2024.

Решења задатака

1. Скуп свих могућих елементарних ишода је:

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in (0, 3)\}.$$

Са $\mathcal{P}(O)$ означимо површину области O .

- (а) Догађај "збир изабраних бројева је мањи од 3 и максимум је мањи од 2" можемо представити као

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \mid \max\{x, y\} < 2, x + y < 3\} \\ &= \{(x, y) \mid x < 2, y < 2, x + y < 3\}. \end{aligned}$$

Користећи слику 1 лако налазимо да је

$$P(A) = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(\Omega)} = \frac{\frac{7}{2}}{9} = \frac{7}{18}.$$

- (б) Догађај "максимум изабраних бројева је мањи од 2" можемо представити као

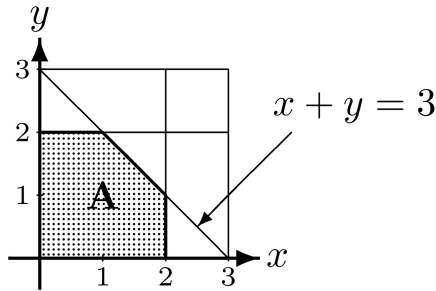
$$B = \{(x, y) \mid \max\{x, y\} < 2\} = \{(x, y) \mid x < 2, y < 2\},$$

а догађај "минимум изабраних бројева је већи од 1" можемо представити као

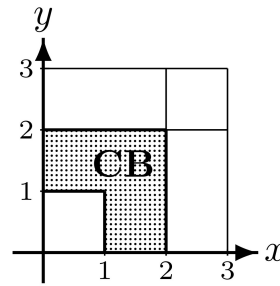
$$C = \{(x, y) \mid \min\{x, y\} > 1\} = \{(x, y) \mid x > 1, y > 1\}.$$

Користећи слику 2 лако налазимо да је

$$P(C|B) = \frac{\mathcal{P}(CB)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{3}{4}.$$



Слика 1.



Слика 2.

2. Нека је I_i случајна променљива која описује да је прималац правилно детектовао сигнал у i -том понављању, $i = 1, 2, \dots, n$. Вероватноћа да је сигнал правилно примљен на излазу једнака је $P\{I_i = 1\} = 0.8 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.65$. Случајна променљива $S_n = \sum_{i=1}^n I_i$ представља број сигнала које је прималац правилно регистровао. Јасно, S_n има биномну $\mathcal{B}(n, 0.65)$ расподелу. Одредимо $n \in \mathbb{N}$ из услова да је $P\left\{S_n \geq \frac{n+1}{2}\right\} = 0.99$. Пошто је $n > 30$, $np > 19.5$ и $n(1-p) > 10.5$, можемо извршити апроксимацију нормалном $\mathcal{N}(0.65n, 0.2275n)$ расподелом, па је

$$P\left\{S_n \geq \frac{n+1}{2}\right\} = 1 - P\left\{S_n < \frac{n+1}{2}\right\} = 0.99$$

$$\begin{aligned}
0.01 &= P\left\{0 \leq S_n < \frac{n+1}{2}\right\} \approx P\left\{-0.5 \leq S_n < \frac{n+1}{2} - 0.5\right\} \\
&= P\left\{\frac{-0.5 - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}} \leq \frac{S_n - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}} < \frac{\frac{n}{2} - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}}\right\} \\
&= \Phi\left(\frac{\frac{n}{2} - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5 - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}}\right)
\end{aligned}$$

Пошто је $n > 30$, то је

$$\frac{-0.5 - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}} \leq -7.6556,$$

па је

$$\Phi\left(\frac{-0.5 - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}}\right) \approx 0.$$

Према томе,

$$\frac{\frac{n}{2} - 0.65n}{\sqrt{0.2275n}} = \Phi^{-1}(0.01) = -2.33,$$

те је

$$0.15n - 2.33\sqrt{0.2275n} = 0,$$

одакле, решавањем квадратне једначине и елиминисањем решења $n = 0$ добијамо да је $\sqrt{n} = 7.4089$, па је $n = 54.8922$. Дакле, пошиљалац треба послати сваки сигнал барем $n = 55$ пута (а прималац треба узети онај сигнал који се јавио барем у 28 случаја).

3. Користећи познат идентитет $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$, имамо да је

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{x=0}^n x \frac{a}{x+a} \binom{n}{x} \frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{n+a+b-1}{x+a}} \\
&= \sum_{x=1}^n n \frac{a}{(x-1) + (a+1)} \binom{n-1}{x-1} \frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{(n-1)+(a+1)+b-1}{(x-1)+(a+1)}} \\
&= \frac{\frac{na}{a+1} \binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+1+b-1}{a+1}} \sum_{x=1}^n \frac{a+1}{(x-1) + (a+1)} \binom{n-1}{x-1} \frac{\binom{a+1+b-1}{a+1}}{\binom{(n-1)+(a+1)+b-1}{(x-1)+(a+1)}} \\
&= \frac{na}{a+b} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a+1}{j + (a+1)} \binom{n-1}{j} \frac{\binom{a+1+b-1}{a+1}}{\binom{(n-1)+(a+1)+b-1}{j+(a+1)}} \\
&= \frac{na}{a+b},
\end{aligned}$$

јер је последња сума једнака 1 као сума вероватноћа из закона расподеле случајне величине X за скуп параметара $(n-1, a+1, b)$.

4. Имамо да је

$$\begin{aligned}
P\{Z \leq z, W = 0\} &= P\{\min\{X, Y\} \leq z, Y \leq X\} = P\{Y \leq z, Y \leq X\} \\
&= \int_0^z \int_y^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dx dy \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(1 - e^{-z\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Слично, добијамо да је

$$\begin{aligned}
P\{Z \leq z, W = 1\} &= P\{\min\{X, Y\} \leq z, X \leq Y\} = P\{X \leq z, X \leq Y\} \\
&= \int_0^z \int_x^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dy dx \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(1 - e^{-z\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Са друге стране, имамо да је

$$P\{W = 0\} = P\{Y \leq X\} = \int_0^\infty \int_y^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} dx dy = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

$$P\{W = 1\} = 1 - P\{W = 0\} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Одавде добијамо да је

$$P\{Z \leq z\} = P\{Z \leq z, W = 0\} + P\{Z \leq z, W = 1\} = 1 - e^{-z\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)}.$$

Закључујемо да вреди да је

$$P\{Z \leq z, W = i\} = P\{Z \leq z\}P\{W = i\},$$

за $i = 0, 1$, $z > 0$, па следи да су случајне величине Z и W независне.