

① Имамо измерљив пратилац $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и скупе $E_1, E_2, \dots, E_{2025}$ такве да $\sum_{k=1}^{2025} \mu(E_k) > 2024$, треба нам да $\mu(\bigcap_{k=1}^{2025} E_k) > 0$

Примићемо супрото да нека колекција скупова E_k има меру која није 0, ако би постојало дај један такав, рецимо E_i , онда $\mu(E_i) = 0$, $\sum_{k=1}^{2025} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{2025} \mu(E_k) > 2024$, али из максималне мере $\mu(E_i) \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2025} \mu(E_k) \leq 2025$.

Другином, уозначимо скупу $E = \bigcap_{k=1}^{2025} E_k$, јавно $\Omega \setminus E = E \cup E^c$, па

$$\text{имамо } \mu(\Omega \setminus E) = \mu(E \cup E^c) \stackrel{(1)}{=} \mu(E) + \mu(E^c) = \mu(E) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{2025} E_k^c\right) \stackrel{(2)}{\leq}$$

$$\mu(E) + \sum_{k=1}^{2025} \mu(E_k^c) = \mu(E) + \sum_{k=1}^{2025} (1 - \mu(E_k)) = \mu(E) + 2025 - \sum_{k=1}^{2025} \mu(E_k).$$

Тај поредак и крај $\Rightarrow \sum_{k=1}^{2025} \mu(E_k) - 2024 \leq \mu(E)$, а мереба коју је боља од 0 из претпоставке.

(1) мереба из адитивности, а (2) из супадитивности мере.

② $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, приједи $\int_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x) dx \leq 1$ за све $n \in \mathbb{N}$, пада $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $\|f\|_1 \leq 1$.

Дефинићемо $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x)$, супрото из чега да је f неограничена имамо $f_n \geq 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Показати да је овај низ функција (по n) на теме мети да применимо ТМХ (јавно f_n су измерљиве јер су $f(x)$ и $\frac{n^2}{n^2 + x^2}$ измерљиве). Фиксирајмо претварање x и израчунајмо $\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + x^2} \geq \frac{n^2}{n^2 + x^2} \Leftrightarrow (n^2 + 2n + 1)(n^2 + x^2) \geq n^2(n^2 + 2n + 1 + x^2)$
 $\Leftrightarrow n^4 + n^2/x^2 + 2n^3 + 2nx^2 + n^2x^2 \geq n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2/x^2 \Leftrightarrow x^2(2n) \geq 0$, па важи
 дејавно $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Сада можемо ући лемма у инте-



$$\text{једна} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx,$$

једна је јачи интеграл замишљамо је мислимо да је функција интеграл не постоји. Међа је $A_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2 + x^2} f(x) dx$, то мислимо интеграл $A_n \leq A_{n+1}$, то је дај мислимо, а то једна је јачи интеграл јер је једна. Једна му је интеграл мислимо. Једна мислимо $f \in L^1(\mathbb{R})$ и једна $\|f\|_1 < 1$ (једна нејачи интеграл $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f| dx = \int_{\mathbb{R}} f dx$).

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)}}}.$$

Једна $f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)}}}$, две функције су нејачи интеграл, једна је за $x \in (0, 1)$, $f_n(x) \leq 1$, једна је за $x \in [1, +\infty)$ и

$n \geq n_0$ $f_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ (једна функција јер је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)} = +\infty$)

једна је јачи интеграл јер је $n_0, \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)} > 2$, једна. $1 + x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)}} \geq 1 + x^2$

Једна да на мислимо не јачи интеграл мислимо мислимо, једна интеграл једна да мислимо интеграл

интеграл једна $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$. Једна,

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 + \arctg x \Big|_1^{+\infty} = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \text{ мислимо је нејачи}$$

једна (једна једна интеграл мислимо мислимо интеграл). Једна, мислимо интеграл ТДК (једна, две f_n су нејачи интеграл јер су нејачи интеграл), једна мислимо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)}}} = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)}}} dx = \int_0^1 dx = 1.$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2025)}}} = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \text{ мислимо мислимо}$$

једна не јачи интеграл.

$$④ \int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx$$

Знамо да приједи послј $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
 за $x \in (-1, 1]$, та $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, одакле

$$\text{рачунамо } \int_0^1 \ln x \ln(1-x) dx = \int_0^1 \ln x (-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln x \cdot \frac{x^n}{n} \right) dx$$

$\stackrel{*}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 -\ln x \cdot \frac{x^n}{n} dx$, ме нам претмаје израчунање сваког

$$\text{интеграла два одима. } \int_0^1 -\ln x \cdot \frac{x^n}{n} dx = -\frac{1}{n} \int_0^1 \ln x \cdot x^n dx = \frac{\Gamma u = \ln x}{du = x^n dx}$$

$$= -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n(n+1)^2}, \text{ тј.}$$

имамо $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ што наравно конвертира по изређен

$\left(\frac{1}{n(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^3}, n \rightarrow +\infty \right)$. Проверајмо само (*), тј. заједно

изјата сули и интегралу, баша од $f_n(x) = -\ln x \cdot \frac{x^n}{n}$ је поштин-
 на (на $(0, 1)$) и непрекида и у том изјату је претисада
 заједна долажена (директна поведина ТМК, могамо дефини-
 сати $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$ и пријеними ТМК на низ $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$). Претмаје

јач израчунање ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$, али $\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2}$ и
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ (оба реда конвер-
 тирају). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$, где је $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (низ парци-
 риних сума је облика $s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$).

Када је трансени интеграл $1 - (\frac{\pi^2}{6} - 1) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

$$⑤ \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm < +\infty$$



a) Za $\mu(E) = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm$ je definisana mala mera na $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$? Isplo us izlaza zadatka $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm < +\infty$, na ako je μ mera, onda je očigledno mala.

$$i) \mu(\emptyset) = \int_{\emptyset} |f|^2 dm = 0$$

$$ii) \text{ Neka je } E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n, \text{ preda nam } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \int_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n} |f|^2 dm = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \chi_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n} dm = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{E_n} dm =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} |f|^2 \chi_{E_n} dm = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \chi_{E_n} dm = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} |f|^2 dm = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n),$$

tj. μ je mala mera. Načinimo li da od svih disjunktnih E_n mala mera izjednači $\chi_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{E_n}$ (primogda li izjednači ako primogda malo jednak smislu), integrirajući i pred svaku sumiranih mala ima jer su sve $|f|^2 \chi_{E_n} \geq 0$ i izjednači (E_n izjednači $\Leftrightarrow \chi_{E_n}$ izjednači), što se može videti pomoću TMK (palegati ⑤)

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{\infty} f dm = 0$$

Uzmimo raspodelu skupa $\mathbb{R}$ na skupove odnosa

$$E_n = [n, n+1), \quad \mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} E_n, \text{ tle izjednači } \mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{E_n} |f|^2 dm = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} |f|^2 dm, \text{ ali kako}$$

je μ mala, to pred sa svake sumirane konvergiraju, na malo sumirane mala mera imamo 0, tj. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{\infty} |f|^2 dm = 0$

$$\text{Егда, } \left| \int_n^{nH} f dm \right| \leq \int_n^{nH} |f| dm \leq \underbrace{\left(\int_n^{nH} |f|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{Харгис за } (2.2)} \left(\int_n^{nH} 1^2 dm \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$\left(\int_n^{nH} |f|^2 dm \right)^{\frac{1}{2}}$. Кривинетис (*) и интегралитис $\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta$ вагнес
нејаднакати годинамо $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_n^{nH} f dm \right| = 0$, тј. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{nH} f dm = 0$.

0 u

(*)
= 0