

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2А - јун 1
23.9.2025.

1. Нека је функција $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & , [x] = [y] \\ \frac{4}{\pi} \cdot \arctg |[x] - [y]| & , [x] \neq [y], \end{cases}$$

где је $[x]$ ознака за цео део реалног броја x , тј. највећи цео број који није већи од x .

- а) [5] Доказати да је d метрика на $\mathbb{R}$.
- б) [6] Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисаног са $x_n = 2 - \frac{1}{n}$. Да ли је $(\mathbb{R}, d)$ комплетан метрички простор?
- в) [4] Одредити отворену куглу $B(n, 1)$ за произвољно $n \in \mathbb{N}$. Да ли је $(\mathbb{R}, d)$ повезан метрички простор?

2. Дата је непрекидна функција $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4 + 2y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ a & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- а) [3] Одредити $a \in \mathbb{R}$.
- б) [4] Наћи парцијалне изводе у свим тачкама $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- в) [3] Испитати непрекидност парцијалних извода $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^2$.
- г) [3] Наћи све тачке у којима је функција f диференцијабилна.

3. Нека је $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задата са $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 5y + x$.

- а) [4] Одредити локалне екстремуме функције f .
- б) [6] Одредити највећу и најмању вредност функције f на скупу

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 3, y \geq 0, y \leq 2x\}.$$

- в) [2] Одредити $f(S)$.

4. [10] Израчунати запремину тела $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z \leq 4 - (x - 2)^2 - y^2, z \geq 0\}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.