

1. а) [5] Дат је низ $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$. Наћи све $n \in \mathbb{N}$ такве да је $a_n > a_{n+1}$.
- б) [5] Нека је $A = \{\frac{n^2+1}{3n^2+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Наћи (ако постоје) $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ и $\max A$.
- в) [7] Нека је $B = \{q^2 - \frac{4}{3}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$. Наћи (ако постоје) $\inf B$, $\sup B$, $\min B$ и $\max B$.
- г) [6] Нека су $A, B \subset \mathbb{R}$ ограничени. Дефинишимо скуп $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$. Тачно једно од следећа два тврђења је тачно. Које? Доказати оно које је тачно, а дати контрапример код нетачног.

$$\text{Тврђење 1 : } \sup(A - B) = \sup A - \sup B$$

$$\text{Тврђење 2 : } \sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

- д) [3] Израчунати $\sup(A - B)$, где су A и B дефинисани у примеру б), односно в).

2. Дата је функција $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- а) [3] Одредити домен функције f .
- б) [3] Доказати да је $f\left(-\frac{1}{2} - x\right) = f\left(-\frac{1}{2} + x\right)$ за све $x > \frac{1}{2}$, односно да је график функције f осносиметричан у односу на праву $x = -\frac{1}{2}$.
- в) [5] Испитати конвексност функције f и доказати је функција f' строго растућа на $(0, +\infty)$.
- г) [5] Наћи $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.
- д) [4] Испитати монотоност функције f .
- ђ) [8] Одредити асимптоте и знак функције f и скицирати њен график.

3. а) [12] Израчунати интеграл $\int_0^{6\pi} \frac{\sin 2x + |\cos x|}{\sin^2 x + |\sin x| + 1} dx$.

б) [7] Наћи примитивну функцију функције $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$ на интервалу $(0, +\infty)$.

в) [7] Доказати да интеграл $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ конвергира и израчунати га.

4. [20] Одредити све $x \in \mathbb{R}$ за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{n!} (x-1)^n$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.