

1. Дата је функција $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
- а) [2] Одредити домен функције f .
 - б) [2] Доказати да је $f\left(-\frac{1}{2} - x\right) = f\left(-\frac{1}{2} + x\right)$ за све $x > \frac{1}{2}$, односно да је график функције f осносиметричан у односу на праву $x = -\frac{1}{2}$.
 - в) [3] Испитати конвексност функције f и доказати је функција f' строго растућа на $(0, +\infty)$.
 - г) [3] Наћи $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.
 - д) [3] Испитати монотоност функције f .
 - ђ) [4] Одредити асимптоте и знак функције f и скицирати њен график.
2. а) [6] Израчунати интеграл $\int_0^{6\pi} \frac{\sin 2x + |\cos x|}{\sin^2 x + |\sin x| + 1} dx$.
- б) [3] Наћи примитивну функцију функције $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$ на интервалу $(0, +\infty)$.
- в) [4] Доказати да интеграл $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ конвергира и израчунати га.
3. [10] Одредити све $x \in \mathbb{R}$ за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{n!} (x-1)^n$.
4. а) [2] Доказати да за свако $t \geq 0$ важи неједнакост $0 \leq \ln(1+t) \leq t$.
- б) [2] Израчунати $\int \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx$ за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.
- в) [3] Доказати да важи $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \left(\ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \right)$ за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.
- г) [3] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.