

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 101) – први колоквијум (Јун 1)
22.9.2025.

1. а) [4] Дат је низ $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$. Наћи све $n \in \mathbb{N}$ такве да је $a_n > a_{n+1}$.
- б) [3] Нека је $A = \{\frac{n^2+1}{3n^2+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Наћи (ако постоје) $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ и $\max A$.
- в) [5] Нека је $B = \{q^2 - \frac{4}{3}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$. Наћи (ако постоје) $\inf B$, $\sup B$, $\min B$ и $\max B$.
- г) [4] Нека су $A, B \subset \mathbb{R}$ ограничени. Дефинишимо скуп $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$. Тачно једно од следећа два тврђења је тачно. Које? Доказати оно које је тачно, а дати контрапример код нетачног.

$$\text{Тврђење 1 : } \sup(A - B) = \sup A - \sup B$$

$$\text{Тврђење 2 : } \sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

- д) [2] Израчунати $\sup(A - B)$, где су A и B дефинисани у примеру б) односно в).
2. а) [5] Одредити константе $a, b \in \mathbb{R}$ такве да важи $5^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ и $3^{\frac{4}{n}} = 1 + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, кад $n \rightarrow \infty$.
- б) [5] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^{\frac{2}{n}} + 3^{\frac{4}{n}}}{2} \right)^{2n}$.
3. Нека је функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \arctg x + ax, & x \leq 1, \\ \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

- а) [6] Наћи константу $a \in \mathbb{R}$ такву да је функција f непрекидна на $\mathbb{R}$.
- б) [9] За вредност a добијену у делу а) наћи све тачке у којима је f диференцијабилна.
4. Нека је $f: [0, 3] \rightarrow [0, 3]$ непрекидна функција таква да је $f(1) = 0$ и $f(2) = 3$.
- а) [5] Доказати да једначина $f(x) = x$ има бар три решења на скупу $[0, 3]$.
- б) [2] Доказати да једначина $f(f(x)) = x$ има бар три решења на скупу $[0, 3]$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.