

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 101) – други колоквијум (Јануар 2)
2.9.2025.

1. Дата је функција $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|}$.
- а) [1] Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
 - б) [2] Израчунати $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$, а потом и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - в) [2] Доказати да функција f има бар једну нулу.
 - г) [10] Испитати ток и скицирати график функције f .
 - д) [2] Да ли постоји тангента на график функције f која је паралелна са правом $y = \frac{2x+2025}{3}$?
2. а) [5] Доказати да интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ конвергира и израчунати његову вредност.
- б) [2] Доказати да за свако $x > 0$ важи једнакост $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
- в) [5] Доказати да интеграл $J = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1} dx$ конвергира и израчунати његову вредност.
3. а) [5] Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - 1 \right)^n$.
- в) [2] Доказати да важи $1 - n \sin \frac{1}{n} \sim \frac{c}{n^2}$, кад $n \rightarrow \infty$ за неку позитивну константу c .
- в) [5] Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \sin \frac{1}{n}} - 1 \right)^{\alpha} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ у зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx$ и нека је функција $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $g(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$.
- а) [2] Доказати да је функција g двапут диференцијабилна и израчунати $g'(x)$ и $g''(x)$ за све $x \in (0, 1)$.
 - б) [3] Доказати да постоји $a \in (0, 1)$ такво да је $\int_0^a f(t) dt = 0$.
 - в) [4] Доказати да постоји $\xi \in (0, 1)$ такво да је $f(\xi) = \int_0^{\xi} f(x) dx$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.