

1. Дат је низ $a_n = \frac{1}{n^2 - 6n - 3}$.

- а) [1] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ако постоји.
- б) [2] Колико овај низ има негативних чланова? Који су то чланови?
- в) [2] Наћи све $n \in \mathbb{N}$ такве да је $a_n > a_{n+1}$.
- г) [4] Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- д) [3] Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $B = \{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2. Нека је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дат са $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ са $b_n = 2^n a_n$.

- а) [5] Доказати да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан и наћи му граничну вредност.
- б) [4] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.
- в) [4] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$.
- г) [4] Доказати да је низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотон и конвергентан.
- *д) [4] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

3. Нека је непрекидна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

- а) [4] Одредити константу α .
- б) [1] Доказати да је f непарна функција.
- в) [1] Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- г) [2] Испитати равномерну непрекидност функције f на скупу $\mathbb{R}$.
- д) [4] Испитати диференцијабилност функције f у тачки $x = 0$.
- ђ) [4] Израчунати $f'_-(\pi)$ и $f'_+(\pi)$. Да ли је функција f диференцијабилна у тачки $x = \pi$?
- е) [5] Доказати да постоји тачка $\xi \in (0, \pi)$ таква да је $f'(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.