

1. Нека је $\mathfrak{M} := \left\{ \bigcup_{k \in I} [k, k+1) \mid I \subseteq \mathbb{Z} \right\}$ и нека је функција $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$\mu(A) := \text{card}\{k \in \mathbb{Z} \mid [k, k+1) \subseteq A\}, \quad A \in \mathfrak{M}.$$

- (а) [3] Доказати да је $\mathfrak{M}$ једна σ -алгебра на $\mathbb{R}$.
- (б) [3] Доказати да је μ мера на $(\mathbb{R}, \mathfrak{M})$.
- (в) [3] Испитати да ли је мера μ коначна, σ -коначна и комплетна.
- (г) [3] Дати пример једне неконстантне $\mathfrak{M}$ -мерљиве функције. Одредити све $\mathfrak{M}$ -мерљиве функције.

2. а) [4] Наћи минимум и максимум (ако постоје) функције $f(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{1+t^2}$ на $[0, +\infty)$.

б) [9] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{n^{\frac{3}{2}} \sin(nx)}{1+n^2 x^2} dx$.

(Коментар: У оригиналној верзији сам желео да буде још један x у бројиоцу)

3. [13] Израчунати интеграл $\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{\arctg x}{x^2} \right) \ln x dx$.

4. а) [6] Нека су $f, g, h : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ Лебег-мерљиве функције такве да је $f(x)^2 \leq g(x)h(x)$ за скоро сваки $x \in [0, 1]$. Доказати да за све Лебег-мерљиве скупове $E \subseteq [0, 1]$ важи

$$\left(\int_E f(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_E g(x) dx \right) \left(\int_E h(x) dx \right).$$

(б) [6] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и нека су $f, g, h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ мерљиве функције. Надаље, нека су $p, q \in (1, \infty)$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказати да за сваки $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$\int_E |fgh| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p |h| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q |h| d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова.